

Ю. С. Быховский, Н. М. Старобинский

МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ, ВНОСИМЫХ В КРУГОВОЙ КОНТУР ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Расчет выходного сопротивления витка в присутствии проводящего полупространства представляет интерес в ряде важных практических случаев.

Известны решения для расстояния от проводящей поверхности, значительно превышающих размеры контура [1] и для случаев пренебрежимо малых расстояний [2].

Для расстояний соизмеримых с размерами контура получены лишь общие выражения, использование которых для расчетов встречают значительные математические трудности [3]. Определение вносимых в контур (фиг. 1) параметров сводится к расчету электромагнитного поля, образованного совокупностью всех токов: током контура и токами в проводящем полупространстве.

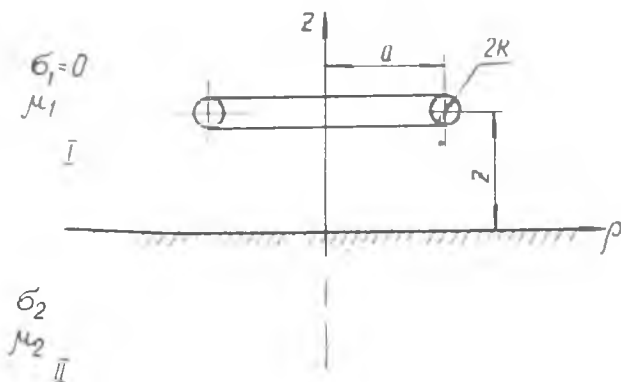


Рис. 1. Виток над проводящим полупространством.

Целесообразно рассматривать известный ток контура как источник возмущения, а токи в проводящем полупространстве как наведенные. Задача сводится к решению уравнения Максвелла для поля, созданного круговым контуром и удовлетворяющего граничным условиям на проводящей поверхности. Не включая токи в полупространстве в категорию источников, мы учитываем их роль в создании поля, потребовав выполнения граничных условий.

Пренебрегая токами смещения в воздухе и в проводящем полупространстве, уравнения Максвелла можно записать в виде:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon \bar{E} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad (3)$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad (4)$$

где H_{1t} и H_{2t} — тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля в среде 1 и 2;

H_{1n} и H_{2n} — нормальные составляющие напряженности магнитного поля;

μ_1 и μ_2 — магнитные проницаемости.

Вектор Поинтинга на поверхности контура имеет две составляющие.

Нормальная составляющая определяет потери в контуре и не влияет на расчет вносимых параметров.

Тангенциальная составляющая определяет реакцию проводящей среды и, следовательно, вносимые в контур параметры.

Для нормальной составляющей напряженности магнитного поля у поверхности выполняется условие:

$$H_{n \text{ пад}} - H_{n \text{ отр}} = H_i. \quad (5)$$

где $H_{n \text{ пад}}$ и $H_{n \text{ отр}}$ — нормальные составляющие вектора \bar{H} падающего и отраженного поля;

H_i — нормальная составляющая вектора \bar{H} в проводящей среде.

Индуктивность контура определяется нормальной составляющей напряженности магнитного поля в плоскости витка:

$$L = \frac{\mu}{I} \int_{S1} (H_{n \text{ пад}} - H_{n \text{ отр}}) dS. \quad (6)$$

Первый член соответствует собственной индуктивности контура, а второй член — вносимой индуктивности, с учетом

$$H_{n \text{ отр}} = H_{n \text{ пад}} - H_i; \quad (7)$$

вносимая индуктивность определится:

$$L_{\text{вн}} = \frac{\mu_1}{I} \int_{S_1} H_{\text{н пад}}^2 dS - L_i', \quad (8)$$

где μ_1 — магнитная проницаемость воздуха;

I — ток витка;

$H_{\text{н пад}}^2$ — нормальная составляющая напряженности магнитного поля витка на удвоенном расстоянии от плоскости контура до проводящей поверхности;

S_1 — площадь контура;

L_i' — индуктивность, обусловленная полем внутри полупространства, пересчитанная в цепь контура.

Для расчета L_i' воспользуемся известной зависимостью для проводящего полупространства

$$R_i = \omega L_i; \quad (9)$$

$$R_{\text{вн}} = \omega L_i', \quad (10)$$

где R_i — сопротивление проводящего полупространства эквивалентное вихревым токам;

$R_{\text{вн}}$ — сопротивление R_i , пересчитанное в цепь витка.

$$\text{Из (10) очевидно, что } L_i' = \frac{R_{\text{вн}}}{\omega}.$$

Для определения $R_{\text{вн}}$ воспользуемся тем известным положением, что активные потери вызываются только касательной составляющей напряженности магнитного поля.

$$R_{\text{вн}} = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{2I^2} \sqrt{\frac{\mu_2}{2\sigma_2}} \int_S H_t^2 \cdot dS, \quad (11)$$

где P — активные потери в проводящем полупространстве;

I — ток витка;

μ_2 и σ_2 — параметры проводящего полупространства;

H_t — касательная составляющая напряженности магнитного поля;

S — площадь полупространства.

Преобразуя (8) с учетом (10) и (11) для вносимой индуктивности, имеем:

$$L_{\text{вн}} = \frac{\mu_1}{I} \int_{S_1} H_{\text{н пад}}^2 dS - \frac{1}{2I^2} \sqrt{\frac{\mu_2}{2\sigma_2}} \int_S H_t^2 dS. \quad (12)$$

При вычислении вносимых параметров $L_{\text{вн}}$ и $R_{\text{вн}}$ необходимо определить значения возмущающей функции $H_{\text{н пад}}$ и H_t для любой точки на проводящей поверхности.

Плотность поля витка в произвольной точке может быть определена из выражений [14].

$$H_t = \frac{I}{4\pi\rho} \left\{ \frac{2 \frac{z}{a}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\rho}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \left[-K + \frac{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}{\left(1 - \frac{\rho}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} E \right] \right\} = \frac{I}{4\pi a} A. \quad (13)$$

$$H_n = \frac{I}{4\pi a} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\rho}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \left[K + \frac{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2}{\left(1 - \frac{\rho}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} E \right] \right\} = \frac{I}{4\pi a} B. \quad (14)$$

где a — радиус витка;

z — расстояние от точки до плоскости витка;

ρ — расстояние от точки до оси витка;

K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Аналитические операции с выражениями (13) и (14) затруднены.

Для плоской поверхности на электронной вычислительной машине рассчитаны универсальные функции $A\left(\frac{\rho}{a}\right)$ и $B\left(\frac{\rho}{a}\right)$ для различных относительных расстояний до проводящей поверхности $\frac{z}{a}$.

В нашем случае осесимметричной задачи для кольцевого элемента поверхности интегральные функции (11) и (12) могут быть представлены в виде:

$$R_{\text{вн}} = \frac{1}{(4\pi)^2 I^2} \sqrt{\frac{\mu_2 \omega}{2\epsilon_2}} \sum_{\frac{\rho}{a}=0}^{\infty} \frac{I^2}{\rho^2} A^2 2\pi\rho b, \quad (15)$$

$$L_{\text{вн}} = \frac{\mu_1}{4\pi I} \sum_{\frac{\rho}{a}=0}^1 \frac{I}{a} B 2\pi\rho b \quad \frac{R_{\text{вн}}}{\omega}, \quad (16)$$

где A и B — выражения, стоящие в фигурных скобках в формулах (13) и (14);

b — ширина элементарного кольца, в пределах которого считаем A или B постоянными.

С достаточной для практических расчетов точностью можно принять $b=0,1a$. Вносимые параметры при этом определяются

$$R_{\text{вн}} = \frac{1}{80\pi} \sqrt{\frac{\mu_2 \omega}{2\pi_2}} \sum_{\frac{\rho}{a}=0}^{\infty} \frac{A^2}{\rho} = \frac{1}{80\pi} \sqrt{\frac{\mu_2 \omega}{2\pi_2}} C, \quad (17)$$

$$L_{\text{вн}} = \frac{\mu_1 a}{20} \sum_{\frac{\rho}{a}=0}^1 B \cdot \frac{\rho}{a} - \frac{R_{\text{вн}}}{\omega} = \frac{\mu_1 a}{20} D - \frac{R_{\text{вн}}}{\omega}, \quad (18)$$

где

$$C = \sum_{\frac{\rho}{a}=0}^{\infty} A^2 \cdot \frac{a}{\rho}; \quad D = \sum_{\frac{\rho}{a}}^1 B \cdot \frac{\rho}{a}.$$

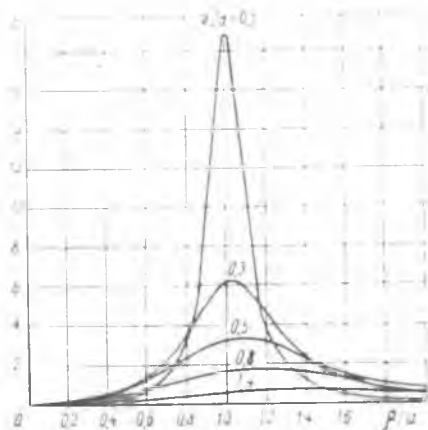


Рис. 2. Зависимости коэффициентов $A\left(\frac{\rho}{a}\right)$ для различных $\frac{z}{a}$.

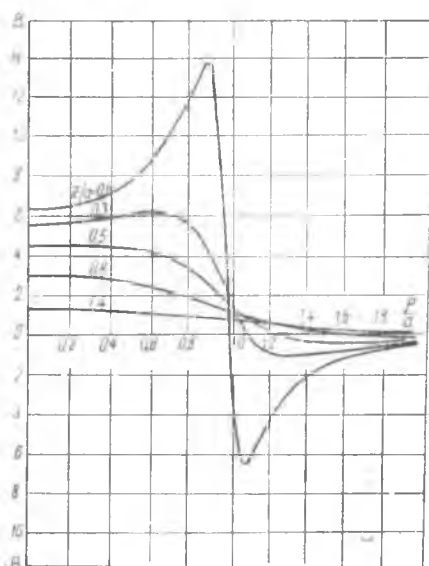


Рис. 3. Зависимости коэффициентов $B\left(\frac{\rho}{a}\right)$ для различных $\frac{z}{a}$.

Коэффициенты C и D определяются только геометрическими факторами: размерами контура и расстоянием до проводящей поверхности. Первая часть выражения (18), являющаяся реакцией идеально проводящего полупространства на контур с током, зависит только от соотношения $\frac{z}{a}$.

На рис. 2 и 3 приведены значения A и B в зависимости от $\frac{p}{a}$ для различных относительных расстояний витка до проводящей поверхности $\frac{z}{a}$.

На рис. 4 приведены зависимости C и D от расстояния между витком и поверхностью $\frac{z}{a}$.

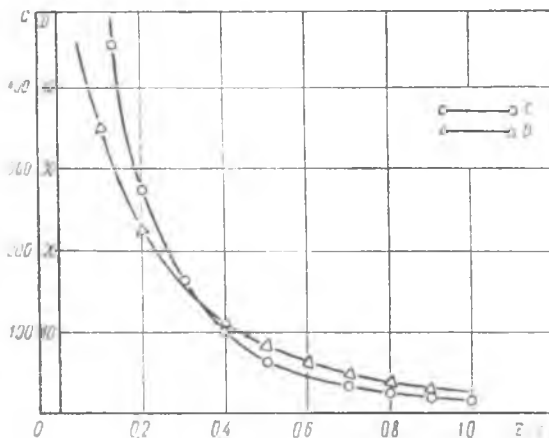


Рис. 4. Зависимости C ($\frac{z}{a}$) и D ($\frac{z}{a}$) для витка, расположенного над проводящим полупространством.

Таким образом, для определения вносимых параметров необходимо по графику рис. 4 определить значение C и D для заданного зазора $\frac{z}{a}$ и подставить эти значения в (17) и (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Каден. Электромагнитные экраны. Перевод с немецкого, ГЭИ, 1957.
2. Ю. А. Выгода. Теоретические основы метода вихревых токов применительно к контролю толщины гальванических покрытий с помощью накладной катушки. «Электронизмерительная техника» (ученые записки), вып. I. Пензенский политехнический институт, 1962.
3. А. Б. Сапожников. Основы электромагнитной дефектоскопии металлических тел. Докторская диссертация, Томск, 1951.
4. Л. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов. Электромагнитные поля и волны. «Советское радио», 1956.