А. Д. Бойков, Н. Д. Егупов

ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В статье рассматриваются методы детерминистского анализа нелинейных систем, базирующиеся на понятии ортогональных спектров. Под детерминистским анализом понимается анализ нелинейных систем, когда на вход действуют детерминированные процессы (например, расчет многомерных импульсных переходных функций, расчет выходной реакции, точностный расчет при воздействии на входе детерминированных сигналов).

Метод описания нелинейных систем с помощью рядов Вольтерра. Многомерные интегральные преобразования

Методы анализа нелинейных систем интенсивно развиваются отечественными и зарубежными учеными. В последние годы появляются работы, развивающие методы анализа нелинейных систем, близкие к методу Винера. К их числу относятся работы В. В. Солодовникова, базирующиеся на применении ортогональных функций [2]. Метод Винера, как показано в [6], тесно связан с методом анализа нелинейных систем, использующим ряды Вольтерра.

В данной работе также будут рассматриваться системы, описывающиеся функционалами типа Вольтерра. Характерной для вольтерровских систем является явная функциональная зависимость выхода от входа:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} k_n(t-\tau_1, t-\tau_2, \ldots, t-\tau_n)\, y(\tau_1)\, y(\tau_2) \cdots y(\tau_n) \times$$
$$\times d\tau_1\, d\tau_2 \cdots d\tau_n. \qquad (1)$$

Ядро $k_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называется весовой функцией порядка n нелинейной системы.

Применение выражения (1) непосредственно для расчета нелинейных систем неудобно и трудоемко.

В [6] для анализа нелинейных систем рассматриваемого класса предложено многомерное преобразование Лапласа, определяемое формулами

$$F(s_1, s_2, \dots, s_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, e^{-s_1 t_1}\, e^{-s}\dots\quad e^{-s_n t_n} \times$$

$$\times\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n, \qquad (2)$$

$$-\sigma_1' < Re\, s_1 < \sigma_1'',$$

$$-\sigma_2' < Re\, s_2 < \sigma_2'',$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$-\sigma_n' < Re\, s_n < \sigma_n'',$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi j)^n}\int\limits_{\sigma_1 - j\omega}^{\sigma_1 + j\omega}\int\limits_{\sigma_2 - j\omega}^{\sigma_2 + j\omega}\dots\int\limits_{\sigma_n - j\omega}^{\sigma_n + j\omega} F(s_1, s_2, \dots, s_n)\, e^{s_1 t_1}\, e^{s_2 t_2}\dots e^{s_n t_n} \times$$

$$\times\, ds_1\, ds_2 \dots ds_n, \qquad (3)$$

$$-\sigma_1' < \sigma_1 < \sigma_1'',$$

$$-\sigma_2' < \sigma_2 < \sigma_2'',$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$-\sigma_n' < \sigma_n < \sigma_n''.$$

Используя многомерное преобразование Лапласа, можно ввести понятие передаточной функции нелинейной системы [1]. Выражение для передаточной функции имеет вид:

$$W_n(s_1, s_2, \dots, s_n) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\dots\int\limits_0^{\infty} k_n(t_1, t_2, \dots, t_n)\, e^{-s_1 t_1}\, e^{-s_2 t_2}\dots e^{-s_n t_n} \times$$

$$\times\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n. \qquad (4)$$

Зная многомерные передаточные функции, а также многомерные преобразования Лапласа для входного сигнала, легко записать простую зависимость для преобразованной по Лапласу выходной функции:

$$X(s_1, s_2, \dots, s_n) = W(s)Y(s) + W(s_1, s_2)Y(s_1)Y(s_2) + \cdots +$$

$$+ W(s_1, s_2, \dots, s_n)\, Y(s_1)\, Y(s_2) \dots Y(s_n). \qquad (5)$$

Выходная реакция нелинейной системы $x(t)$ может быть определена, если найти обратное преобразование Лапласа $x(t_1, t_2, \dots, t_n)$ для $X(s_1, s_2, \dots, s_n)$, а затем положить $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$, т. е.

$$x(t) = L_1^{-1}[W(s)Y(s)] + z_2^{-1}[W(s_1, s_2)\, Y(s_1)Y(s_2)]_{t_1=t_2=t} +$$

$$+ \dots + L_n^{-1}[W(s_1, s_2, \dots, s_n)\, Y(s_1)Y(s_2)\, \dots\, Y(s_n)]_{t_1=t_2=\dots=t_n=t}\,. \qquad (6)$$

Таким образом, реакция нелинейной системы получается из (6) при использовании обратного преобразования Лапласа и последующем отождествлении переменных, т. е.

$$x_i(t) = L_i^{-1}\left[X(s_1, s_2, \ldots, s_i)\right]_{t_1=t_2=\ldots=t_i=t}. \qquad (7)$$

В [7] предложен метод «ассоциации переменных», облегчающий выполнение (7).

Многомерное преобразование Лапласа и, в частности, метод «ассоциации переменных» облегчают анализ нелинейных систем. Однако осуществление (7) даже с использованием этого метода сильно затрудняется по мере усложнения структуры функции $X(s_1, s_2, \ldots, s_i)$.

В настоящей работе предлагается метод анализа нелинейных стационарных систем управления, основанный на разложении выходной реакции или импульсных переходных функций по системам ортогональных функций. При этом, во-первых, значительно облегчается осуществление обратного многомерного преобразования Лапласа и, во-вторых, получается нелинейная система с симметричными вырожденными весовыми функциями.

Таким образом, развиваемый в работе метод позволяет проводить в нелинейных системах рассматриваемого класса анализ переходных процессов. Ортогональные разложения дают мощный метод практического отыскания оригиналов по заданным многомерным изображениям функций.

Предлагаемый метод несколько громоздок, но прост и хорошо приспособлен для расчетов на ЦВМ.

Анализ переходных процессов в нелинейных САУ

Предположим, для примера, что нам необходимо найти многомерные импульсные переходные функции, если известны многомерные передаточные функции.

Для решения задачи будем пользоваться классическими ортогональными системами, большинство из которых (определенных на конечном интервале) хорошо зарекомендовали себя при аппроксимации произвольных функций, определенных на любом конечном интервале. К числу наиболее интересных ортогональных систем следует отнести усеченные полиномы Чебышева, Якоби, Лежандра и др.

Пусть искомая функция удовлетворяет условию:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty |k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)|^2 \rho(\tau_1)\rho(\tau_2)\ldots\rho(\tau_p)\,d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_p < \infty, \qquad (8)$$

где

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \rho(\tau_1)\rho(\tau_2)\ldots\rho(\tau_p)\,d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_p < \infty. \qquad (9)$$

Пусть, кроме того, известно многомерное преобразование Лапласа для функции

$$k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)\rho(\tau_1)\rho(\tau_2)\ldots\rho(\tau_p), \text{ т. е.}$$

$$\widetilde{W}(s_1, s_2, \ldots, s_p) = L[k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)\rho(\tau_1)\rho(\tau_2)\ldots\rho(\tau_p)]. \quad (10)$$

Для того, чтобы свести область определения функции к необходимому интервалу, сделаем следующую замену переменной:

$$x_n = e^{-t_n}.$$

Учитывая сказанное выше, выражение многомерного преобразования Лапласа для функции $k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)\rho(\tau_1)\rho(\tau_2)\ldots\rho(\tau_p)$ запишется в виде:

$$\widetilde{W}(s_1, s_2, \ldots, s_p) = \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_1^{s_1}x_2^{s_2}\ldots x_p^{s_p}\,\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,\omega(x_1)\,\omega(x_2)\ldots$$
$$\ldots\omega(x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p, \quad (11)$$

где

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = k(-\ln x_1, -\ln x_2, \ldots, -\ln x_p), \quad (12)$$

$$\omega(x_n) = \frac{\rho(-\ln x_n)}{x_n}. \quad (13)$$

Теперь функция $\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ лежит в области определения классических ортогональных систем.

Будем находить функцию $\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ в виде ортогонального ряда:

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_p=0}^{\infty}\frac{c_{i_1 i_2\ldots i_p}}{r_{i_1 i_2\ldots i_p}}\varphi_{i_1}(x_1)\,\varphi_{i_2}(x_2)\ldots\varphi_{i_p}(x_p), \quad (14)$$

где коэффициенты ортогонального разложения определяются формулой

$$c_{i_1 i_2\ldots i_p} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,\varphi_{i_1}(x_1)\,\varphi_{i_2}(x_2)\ldots\varphi_{i_p}(x_p)\,\omega(x_1)\,\omega(x_2)\ldots$$
$$\ldots\omega(x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p. \quad (15)$$

Для определения элементов ортогонального спектра функции $\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ представим многомерную функцию $x_1^{s_1}x_2^{s_2}\ldots x_p^{s_p}$ в виде ортогонального ряда, составленного из функций заранее выбранной ортогональной системы, при этом коэффициенты разложения определяются зависимостью:

$$F_{i_1 i_2\ldots i_p}(s_1, s_2, \ldots, s_p) = \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_1^{s_1}x_2^{s_2}\ldots x_p^{s_p}\,\omega(x_1)\,\omega(x_2)\ldots$$
$$\ldots\omega(x_p)\,\varphi_{i_1}(x_1)\,\varphi_{i_2}(x_2)\ldots\varphi_{i_p}(x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p. \quad (16)$$

Осуществляя многократное интегрирование по частям по всем переменным, можно найти явную зависимость для $F_{i_1 i_2\ldots i_p}(s_1, s_2, \ldots, s_p)$.

Таким образом, разложение запишется так:

$$x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_p^{s_p} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_p=0} F_{i_1 i_2 \dots i_p}(s_1, s_2, \dots, s_p) \varphi_{i_1}(x_1) \varphi_{i_2}(x_2) \dots \varphi_{i_p}(x_p). \quad (17)$$

Подставляя полученный ряд в зависимость (16) и используя обобщенное равенство Парсеваля, можно записать интерполяционный ряд по дробно-рациональным функциям, который аппроксимирует функцию $W(s_1, s_2, \dots, s_p)$. На основе рассуждений, изложенных в [5], приведем вид абсолютно и равномерно сходящегося ряда:

$$\widetilde{W}(s_1, s_2, \dots, s_p) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_p^{s} \widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_p)\, \omega(x_1)\, \omega(x_2) \dots$$

$$\dots \omega(x_p)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_p = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_p=0}^{\infty} c_{i_1 i_2 \dots i_p} N_{i_1}(s_1)\, N_{i_2}(s_2) \dots N_{i_p}(s_p), \quad (18)$$

где

$$N_{i_l}(s_l) = N_{1 i_l}(s_l)\, s_l\, (s_l - 1) \dots (s_l - i_l + 1).$$

В полученном ряде, придавая комплексным аргументам $s_1, s_2, \dots s_p$ последовательно значения 0, 1, 2, ..., можно получить треугольную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных элементов ортогонального спектра.

Последовательно можно определить необходимое число коэффициентов ортогонального разложения искомой функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Запишем расчетные формулы для наиболее распространенных ортогональных систем:

1. Полиномы Якоби

а) общая формула:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+\alpha+\beta+1) \dots (n+\alpha+\beta+k)}{(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+k)}\, x^k, \quad (19)$$

где

$$\binom{n+\alpha}{n} = \frac{(n+\alpha) \dots (1+\alpha)}{n!}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1;$$

б) свойство ортогональности:

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\, \Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\, \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & m = n; \end{cases} \quad (20)$$

в) система уравнений:

$$\prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(2n_j+\alpha+\beta+1)}{n_j!\, \Gamma(n_j+\alpha+\beta+1)} \widetilde{W}(n_1, n_2, \dots, n_p) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_p=0}^{n_p} M_{i_1}(\alpha, \beta, n_1) \times$$

$$\times M_{i_2}(\alpha, \beta, n_2) \dots M_{i_p}(\alpha, \beta, n_p)\, c_{i_1 i_2 \dots i_p}; \quad (21)$$

где

$$M_{i_l}(\alpha, \beta, n_l) = \frac{(2i_l+\alpha+\beta+1)}{(n_l-i_l)!} \frac{\Gamma(2n_l+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(i_l+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n_l+\alpha+1)}{\Gamma(n_l+i_l+\alpha+\beta+2)\,\Gamma(n_l+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(i_l+\alpha+1)};$$

г) вид искомой функции:

$$k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_p=0}^{\infty} \frac{c_{i_1 i_2 \ldots i_p}}{r_{i_1 i_2 \ldots i_p}} P_{i_1}^{(\alpha,\beta)}(e^{-\tau_1})\,P_{i_2}^{(\alpha,\beta)}(e^{-\tau_2})\ldots$$

$$\ldots P_{i_p}^{(\alpha,\beta)}(e^{-\tau_p}); \tag{22}$$

д) функция веса:

$$\rho(t) = e^{-(\alpha+1)t}(1-e^{-t})^{\beta}. \tag{23}$$

2. Полиномы Якоби. Случай $\beta=0$.

Функция веса в этом случае имеет вид

$$\rho(t) = e^{-(\alpha+1)t}. \tag{24}$$

Все результаты легко получить из предыдущих формул.

3. Полиномы Лежандра. Случай $\alpha=\beta=0$.

Функция веса

$$\rho(t) = e^{-t}, \tag{25}$$

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}.$$

Все результаты легко получить из приведенных выше формул.

4. Многочлены Чебышева I рода.

Они получаются из многочленов Якоби, если положить

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}.$$

Функция веса

$$\rho(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(1-e^{-t})^{-\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

Многочлены определяются формулой

$$T_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^k \frac{n(n+1)\ldots(n-k-1)}{(2k-1)!!} x^k. \tag{27}$$

5. Многочлены Чебышева II рода

Случай $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Функция веса

$$\rho(t) = e^{-\frac{3}{2}t}(1-e^{-t})^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Общая формула для определения многочленов Чебышева имеет вид

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n\, 2^n (2n+1)!!}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{2^k (n+2)\ldots(n+k+1)}{(2k+1)!!} x^k. \tag{29}$$

Во всех рассмотренных случаях искомая функция получается в виде (14).

Здесь были рассмотрены случаи применения классических ортогональных систем, определенных на конечном интервале (0,1) для расчета функций многих переменных. Однако было указано, что для восстановления функции $\kappa(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ необходимо знать функцию многих комплексных аргументов $s_1, s_2, ..., s_p$ вида (10). Часто же такую функцию найти довольно трудно, а известна функция вида

$$W(s_1, s_2, \dots, s_p) = \int_0^\infty\int_0^\infty \dots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \dots \tau_p)\, e^{-s_1\tau_1} e^{-s_2\tau_2} \dots e^{-s_p\tau_p}\, d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_p. \tag{30}$$

Для того, чтобы воспользоваться изложенной выше методикой, введем в рассмотрение функцию

$$\xi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) = \frac{k\left(\frac{\tau_1}{h_1}, \frac{\tau_2}{h_2}, \dots, \frac{\tau_p}{h_p}\right)}{\rho(\tau_1)\,\rho(\tau_2)\dots\rho(\tau_p)}\, e^{-\frac{\gamma_0^1\tau_1}{h_1}} e^{-\frac{\gamma_0^2\tau_2}{h_2}} \dots e^{-\frac{\gamma_0^p\tau_p}{h_p}}. \tag{31}$$

Тогда можно записать

$$h_1 h_2 \dots h_p W(\gamma_0^1 + s_1 h_1, \gamma_0^2 + s_2 h_2, \dots, \gamma_0^p + s_p h_p) = \int_0^\infty\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-s_1\tau_1} e^{-s_2\tau_2} \dots$$

$$\dots e^{-s_p\tau_p} e^{-\frac{\gamma_0^1\tau_1}{h_1}} e^{-\frac{\gamma_0^2\tau_2}{h_2}} \dots e^{-\frac{\gamma_0^p\tau_p}{h_p}}\, k\left(\frac{\tau_1}{h_1}, \frac{\tau_2}{h_2}, \dots, \frac{\tau_p}{h_p}\right) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_p =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-s_1\tau_1} e^{-s_2\tau_2} \dots e^{-s_p\tau_p} \rho(\tau_1)\,\rho(\tau_2)\dots\rho(\tau_p)\,\xi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p)\, d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_p. \tag{32}$$

Используя последнюю запись и изложенную выше методику, функцию $\xi(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_p)$ можно найти в виде

$$\xi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) = \sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \dots \sum_{i_p=0}^\infty \frac{\bar{c}_{i_1 i_2 \dots i_p}}{r_{i_1 i_2 \dots i_p}} \varphi_{i_1}(e^{-\tau_1})\,\varphi_{i_2}(e^{-\tau_2}) \dots \varphi_{i_p}(e^{-\tau_p}). \tag{33}$$

Тогда искомая функция находится в форме:

$$k\left(\frac{\tau_1}{h_1}, \frac{\tau_2}{h_2}, \dots, \frac{\tau_p}{h_p}\right) = \left[\sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \dots \sum_{i_p=0}^\infty \frac{\bar{c}_{i_1 i_2 \dots i_p}}{r_{i_1 i_2 \dots i_p}} \varphi_{i_1}(e^{-\tau_1})\,\varphi_{i_2}(e^{-\tau_2}) \dots\right.$$

$$\left.\dots \varphi_{i_p}(e^{-\tau_p})\right] \rho(\tau_1)\,\rho(\tau_2)\dots\rho(\tau_p)\, e^{-\frac{\gamma_0^1\tau_1}{h_1}} e^{-\frac{\gamma_0^2\tau_2}{h_2}} \dots e^{-\frac{\gamma_0^p\tau_p}{h_p}}. \tag{34}$$

Рассмотрим применение полиномов Лягерра для анализа нелинейной системы.

Обобщенные полиномы Лягерра определяются формулами -

$$L_k^{(\lambda)}(t)=\frac{1}{k!}\,t^{-\lambda}\,e^t\,\frac{d^k}{dt^k}\,\{e^{-t}\,t^{k+\lambda}\},$$

$$L_m^{(\lambda)}(t)=\sum_{m=0}^{k}\frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\Gamma(m+\lambda+1)}\,\frac{(-t)^m}{m!(n-m)!} \tag{35}$$

и обладают свойством:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^\lambda L_k^{(\lambda)}(t)\,L_m^{(\lambda)}(t)\,dt=\begin{cases}0, & k\neq m\\ \dfrac{\Gamma(k+\lambda+1)}{k!}, & k=m.\end{cases} \tag{36}$$

Представим функцию $k(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p)\,\tau_1^{-\lambda}\,\tau_2^{-\lambda}\ldots\tau_p^{-\lambda}$ в виде

$$k(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p)\,\tau_1^{-\lambda}\,\tau_2^{-\lambda}\ldots\tau_p^{-\lambda}=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_p=0}^{\infty}c_{i_1 i_2\ldots i_p}\,\frac{i_1!}{\Gamma(i_1+\lambda+1)}\times$$

$$\times\frac{i_2!}{\Gamma(i_2+\lambda+1)}\cdots\frac{i_p!}{\Gamma(i_p+\lambda+1)}\,L_{i_1}^{(\lambda)}(\tau_1)\,L_{i_2}^{(\lambda)}(\tau_2)\ldots L_{i_p}^{(\lambda)}(\tau_p). \tag{37}$$

Задача состоит в том, чтобы по многомерной передаточной функции вида $W(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ найти способ вычисления коэффициентов ортогонального разложения, где в качестве базиса выбраны обобщенные полиномы Лягерра.

Представим функцию $V(s_1, s_2, \ldots, s_p, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)=e^{-(s_1-1)\tau_1}\times\times e^{-(s_2-1)\tau_2}\ldots e^{-(s_p-1)\tau_p}$ в виде ортогонального ряда по многочленам Лягерра. Тогда можно записать

$$V(s_1,s_2,\ldots,s_p,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_p=0}^{\infty}\frac{1}{s_1^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{s_1}\right)^{i_1}\frac{1}{s_2^{\lambda+1}}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{s_2}\right)^{i_2}\cdots\frac{1}{s_p^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{s_p}\right)^{i_p}L_{i_1}^{(\lambda)}(\tau_1)\,L_{i_2}^{(\lambda)}(\tau_2)\ldots L_{i_p}^{(\lambda)}(\tau_p). \tag{38}$$

Многомерный интеграл, определяющий передаточную функцию, можно представить в виде

$$W(s_1,s_2,\ldots,s_p)=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\tau_1^\lambda\,\tau_2^\lambda\ldots\tau_p^\lambda\,e^{-\tau_1}\,e^{-\tau_2}\ldots e^{-\tau_p}\,e^{-(s_1-1)\tau_1}\times$$

$$\times e^{-(s_2-1)\tau_2}\ldots e^{-(s_p-1)\tau_p}\,g(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p)\,d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_p, \tag{39}$$

где

$$g(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p)=k(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p)\,\tau_1^{-\lambda}\,\tau_2^{-\lambda}\ldots\tau_p^{-\lambda}. \tag{40}$$

С помощью обобщенного равенства Парсеваля, используя формулы (38) и (39), можно записать

$$W(s_1,s_2,\ldots s_p)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{i_p=0}^{\infty}c_{i_1 i_2\ldots i_p}\,\frac{1}{s_1^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{s_1}\right)^{i_1}\frac{1}{s_2^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{s_2}\right)^{i_2}\ldots$$

$$\ldots\frac{1}{s_p^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{s_p}\right)^{i_p}. \tag{41}$$

Используя замену переменной вида $z_i = \frac{1}{s_i}$, получим:

$$\frac{1}{z_1^{\lambda+1}} \frac{1}{z_2^{\lambda+1}} \cdots \frac{1}{z_p^{\lambda+1}} W\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_p}\right) = W_z(z_1, z_2, \ldots, z_p) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_p=0}^{\infty} c_{i_1 i_2 \ldots i_p} (1-z_1)^{i_1} (1-z_2)^{i_2} \cdots (1-z_p)^{i_p}. \quad (42)$$

Анализ последней формулы показывает, что коэффициенты ортогонального разложения функции $g(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ одновременно с тем являются коэффициентами разложения многомерной функции $W(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ в ряд Тейлора в окрестности $z_1 = z_2 = \ldots = z_p = 1$.

Тогда справедливо равенство

$$c_{i_1 i \ldots i_p} = \frac{(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_p}}{i_1!\, i_2! \ldots i_p!} \frac{\partial^{(i_1+i_2+\ldots+i_p)}}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_p^{i_p}} \{W_z(z_1, z_2, \ldots, z_p)\}. \quad (43)$$

Если передаточные функции нелинейной системы являются дробно-рациональными функциями, то можно найти общие формулы для коэффициентов ортогонального разложения, выраженные непосредственно через коэффициенты передаточной функции.

Анализ точности работы нелинейной системы при детерминированном входном сигнале. Коэффициенты ошибок нелинейной системы

Связь между входом и выходом нелинейной системы выражается с помощью ряда Вольтерра:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} k_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, y(t-\tau_1)\, y(t-\tau_2) \ldots$$
$$\ldots y(t-\tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n. \quad (44)$$

Так же, как и в линейном случае, представим сигнал $y(t-\tau_i)$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки t. Тогда имеем:

$$y(t-\tau_i) = y(t) - y'(t)\frac{\tau_i}{1!} + y''(t)\frac{\tau_i^2}{2!} + \cdots + (-1)^k y^{(k)}(t)\frac{\tau_i^k}{k!} =$$

$$= \sum_{m_i=0}^{k} (-1)^{m_i} y^{(m_i)}(t) \frac{\tau_i^{m_i}}{m_i!}. \quad (45)$$

Подставляя последнюю формулу в (44) и считая, что система устойчива, т. е. что имеется возможность поменять местами операции интегрирования и суммирования, получим

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{k} \sum_{m_2=0}^{k} \cdots \sum_{m_n=0}^{k} (-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_n} y^{(m_1)}(t)\, y^{(m_2)}(t) \ldots$$

$$\ldots y^{(m_n)}(t) \frac{1}{m_1!} \frac{1}{m_2!} \cdots \frac{1}{m_n!} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} k_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \tau_1^{m_1} \tau_2^{m_2} \ldots \tau_n^{m_n}\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots$$
$$\ldots d\tau_n. \quad (46)$$

Ошибка системы определяется формулой

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t) = y(t) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{k}\sum_{m_2=0}^{k}\cdots\sum_{m_n=0}^{k}(-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_n} y^{(m_1)}(t)\times$$

$$\times y^{(m_2)}(t)\ldots y^{(m_n)}(t)\frac{1}{m_1!}\frac{1}{m_2!}\cdots\frac{1}{m_n!}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}k_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\ldots$$

$$\ldots\tau_n^{m_n}d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{k}\sum_{m_2=0}^{k}\cdots\sum_{m_n=0}^{k}F_{m_1m_2\ldots m_n}c_{m_1m_2\ldots m_n}, \quad (47)$$

где $F_{m_1m_2\ldots m_n}$ — функции входного процесса и его производных,

$c_{m_1m_2\ldots m_n}$ — многомерные коэффициенты ошибок; они могут быть определены по формуле

$$c_{m_1m_2\ldots m_n} = \frac{(-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!}\,\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}{\partial s_1^{m_1}\partial s_2^{m_2}\ldots\partial s_n^{m_n}}W(s_1, s_2, \ldots, s_n). \quad (48)$$

Нулевой коэффициент, как известно, определяется формулой

$$c_0 = 1 - \int_0^{\infty}k(\tau)\,d\tau. \quad (49)$$

Для простоты рассмотрим конкретную систему.
Пусть

$$x(t) = \int_0^{\infty}k(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k(\tau_1, \tau_2)\,y(t-\tau_1)\,y(t-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2, \quad (50)$$

$$y(t-\tau) = y(t) - \dot{y}(t)\tau + \ddot{y}(t)\frac{\tau^2}{2}.$$

Тогда можно записать следующее:

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t) = y(t) - y(t)\int_0^{\infty}k(\tau)\,d\tau + \dot{y}(t)\int_0^{\infty}\tau k(\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{\ddot{y}(t)}{2}\int_0^{\infty}\tau^2 k(\tau)\,d\tau - y(t)\,y(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 + y(t)\dot{y}(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k(\tau_1, \tau_2)\,\tau_2 d\tau_1 -$$

$$-d\tau_2 - y(t)\,\ddot{y}(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\tau_2^2}{2}k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \dot{y}(t)y(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\tau_1 k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 -$$

$$-\dot{y}(t)\,\dot{y}(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\tau_1\tau_2 k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \dot{y}(t)\,\ddot{y}(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\tau_1\frac{\tau_1^2}{2}k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$-\ddot{y}(t)\,y(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\tau_1^2}{2}k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \ddot{y}(t)\,\dot{y}(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\tau_1^2}{2}\tau_2 k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$-\ddot{y}(t)\,\ddot{y}(t)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\tau_1^2}{2}\frac{\tau_2^2}{2}k(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 = c_0 y(t) + c_1\dot{y}(t) + c_2\ddot{y}(t) +$$

$$+F_{00}c_{00} + F_{01}c_{01} + F_{02}c_{02} + F_{10}c_{10} + F_{11}c_{11} + F_{12}c_{12} + F_{20}c_{20} +$$
$$+F_{21}c_{21} + F_{22}c_{22},$$

где c_i, c_{ij} — коэффициенты ошибок,

F_{ij} — функции входного процесса и его производных.

Приведем основные этапы полного детерминистского анализа нелинейной системы.

1. Находятся многомерные передаточные функции отдельных элементов нелинейной системы [6].

2. Находится многомерная передаточная функция разомкнутой нелинейной системы [6].

3. Находится многомерная передаточная функция замкнутой нелинейной системы.

4. Изучается эффект обрыва ряда Вольтерра [6] (находится радиус сходимости).

Этот пункт также является обязательным при анализе нелинейной системы, так как известно, что замкнутая нелинейная система не может быть охарактеризована конечным числом ядер Вольтерра.

5. Строится переходный процесс нелинейной системы на заданное входное воздействие.

6. Вычисляются функции или постоянные $F_{m_1 m_2 \dots m_n}$.

7. Вычисляются многомерные коэффициенты ошибок $c_{m_1 m_2 \dots m_n}$.

8. Находится величина установившейся ошибки при заданном входном воздействии.

Пример 1. Пусть имеется нелинейная система, передаточная функция которой имеет вид:

$$W(s_1, s_2) = \frac{1}{(T_{a0}s_1+1)(T_{a1}^2 s_1^2 + 2T_{a1}\xi_1' s_1+1)(T_{a2}^2 s_1^2+2T_{a2}\xi_2' s_1+1)(T_{b0}s_2+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{(T_{b1}^2 s_2^2+2T_{b1}\xi_1'' s_2+1)(T_{b2}^2 s_2^2+2T_{b2}\xi_2'' s_2+1)} + \frac{1}{(T_{a0}s_1+1)(T_{a1}^2 s_1^2+2T_{a1}\xi_1' s_1+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{(T_{a2}^2 s_1^2+2T_{a2}\xi_2' s_1+1)(\overline{T}_{b0}s_2+1)(T_{b1}^2 s_2^2+2T_{b1}\xi_1'' s_2+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(\overline{T}_{a0}s_1+1)(\overline{T}_{a1}^2 s_1^2+2\overline{T}_{a1}\overline{\xi}_1' s_1+1)(T_{b0}s_2+1)(T_{b1}^2 s_2^2+2T_{b1}\xi_1'' s_2+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{(\overline{T}_{b2}^2 s_2^2+2\overline{T}_{b2}\xi_1'' s_2+1)} + \frac{1}{(\overline{T}_{a0}s_1+1)(\overline{T}_{a1}^2 s_1^2+2\overline{T}_{a1}\overline{\xi}_1' s_1+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{(\overline{T}_{b0}s_2+1)(\overline{T}_{b1}^2 s_2^2+2\overline{T}_{b1}\overline{\xi}_1'' s_2+1)},$$

где $\overline{T}_{a0} = 0{,}05 \quad T_{a0} = 0{,}151 \quad \zeta_1' = 0{,}2 \quad \overline{T}_{b0} = 0{,}06 \quad T_{b1} = 0{,}13$

$\overline{T}_{a1} = 0{,}3 \quad T_{a1} = 0{,}402 \quad \zeta_2' = 0{,}15 \quad \overline{T}_{b1} = 0{,}28 \quad T_{b1} = 0{,}38$

$\overline{\zeta}_1' = 0{,}15 \quad T_{a2} = 0{,}151 \quad \zeta_1'' = 0{,}3 \quad \overline{T}_{b2} = 0{,}25 \quad T_{b2} = 0{,}172$

$\zeta_2'' = 0{,}3$

В качестве ортогонального базиса принимаем ортогонализированные экспоненциальные функции вида

$$\varphi_1(t) = e^{-0{,}5t},$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{3}(-e^{-0,5t} + 2e^{-1,5t})$$
$$\varphi_3(t) = \sqrt{5}(e^{-0,5t} - 6e^{-1,5t} + 6e^{-2,5t}),$$
$$\varphi_4(t) = \sqrt{7}(-e^{-0,5t} + 12e^{-1,5t} - 30e^{-2,5t}\, 20e^{-3,5t}),$$
$$\varphi_5(t) = \sqrt{9}(e^{-0,5t} - 20e^{-1,5t} - 140e^{-3,5t} + 70e^{-4,5t}),$$
$$\varphi_6(t) = \sqrt{11}(-e^{-0,5t} + 30e^{-1,5t} - 210e^{-2,5t} + 560e^{-3,5t} - 630e^{-4,5t} + 252e^{-5,5t}),$$
$$\varphi_7(t) = \sqrt{13}(e^{-0,5t} - 42e^{-1,5t} + 420e^{-2,5t} - 1680e^{-3,5t} + 3150e^{-4,5t} - 2772e^{-5,5t} + 92e^{-6,5t}).$$

Для этих функций справедливо свойство:

$$\int_0^\infty \varphi_n(t)\,\varphi_m(t)\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Легко проверить, что моменты функции $\kappa(\tau_1, \tau_2)$ являются разделимыми, что позволит записать их следующим образом:

$$\mu_{ij} = \mu'_i \mu''_j, \quad i = 1, 2, \ldots, 7, \quad j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Придавая комплексным аргументам s_1 и s_2 действительные значения $s_1 = 0,5;\ 1,5;\ 2,5;$

$s_2 = 0,5;\ 1,5;\ 2,5;$

получим значения моментов μ_{ij}, где

$\mu'_1 = 1,7206349$ $\quad$ $\mu''_1 = 1,6619766$

$\mu'_2 = 1,1494222$ $\quad$ $\mu''_2 = 1,0727699$

$\mu'_3 = 0,7369546$ $\quad$ $\mu''_3 = 0,68413909$

$\mu'_4 = 0,4804869$ $\quad$ $\mu''_4 = 0,4490613$

$\mu'_5 = 0,3244813$ $\quad$ $\mu''_5 = 0,3064841$

$\mu'_6 = 0,2275674$ $\quad$ $\mu''_6 = 0,2173002$

$\mu'_7 = 0,1652781$ $\quad$ $\mu''_7 = 0,1593786$

Используя изложенную выше методику, можно получить значения коэффициентов ортогонального разложения функции $\kappa(\tau_1, \tau_2)$.

Они равны $c_{i_1 i_2} = c'_{i_1} c''_{i_2}$, где

$c'_1 = 1,7206349$ $\quad$ $c''_1 = 1,6619766$

$c'_2 = 1,0014904$ $\quad$ $c''_2 = 0,8375562$

$c'_3 = -1,6863847$ $\quad$ $c''_3 = -1,4977378$

$c'_4 = -1,1283141$ $\quad$ $c''_4 = -0,8775469$

$c'_5 = 1,5108867$ $\quad$ $c''_5 = 1,0931735$

$c'_6 = -0,0067706$ $\quad$ $c''_6 = 0,00313319$

$c'_7 = -0,85013474$ $\quad$ $c''_7 = -0,5211698$

Таким образом имеем:

$$k(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i_1=1}^{7} \sum_{i_2=1}^{7} c_{i_1 i_2} \varphi_{i_1}(\tau_1) \varphi_{i_2}(\tau_2). \tag{52}$$

Данные расчета сведены в табл. 1, дискретность построения которой $\Delta t = 0{,}2$ *сек.*

Таблица 1

$k(\tau_1, 0)$ расчетное	$k(\tau_1, 0)$ эталонное	$k(0, \tau_2)$ расчетное	$k(0, \tau_2)$ эталонное
—1,855842	0,000000	—1,147340	0,000000
1,052333	1,555326	1,218862	1,567605
3,238192	3,312131	3,029250	3,103089
4,788074	4,304568	3,976658	3,687489
3,495785	3,719190	3,921645	3,046961
1,308319	1,757032	1,288294	1,559166
—0,301484	—0,299401	0,0717607	0,0549356
—1,148741	—1,612549	—0,616124	—0,970484
—1,316476	—1,847858	—0,820025	—1,219928
—1,117034	—1,448838	—0,749049	—0,926983
—0,791493	—0,850571	—0,568324	—0,472217
—0,475371	—0,235233	—0,374439	—0,121139
—0,224451	0,278669	—0,210905	0,0498085

Полагая в формуле (52) $t_1 = t_2 = t$, можно найти реакцию нелинейной системы на импульсное воздействие. Процесс определяется так:

$$x(t) = k(t_1, t_2)_{t_1=t_2=t} = \sum_{i_1=1}^{7} \sum_{i_2=1}^{7} c_{i_1 i_2} \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2)_{t_1=t_2=t}.$$

Пример 2. Рассчитать динамическую ошибку нелинейной системы, передаточная функция которой имеет вид

$$W(s_1, s_2) = \frac{1}{(T_1^2 s_1^2 + 2T_1\xi_1 s_1 + 1)(T_2^2 s_2^2 + 2T_2\xi_2 s_2 + 1)} + \frac{1}{(T_0^2 s_1^2 + 2T_0\xi_0 s_1 + 1)},$$

если на вход подается функция вида: $y(t) = h_1 t$.

Используя изложенную выше методику, видим, что

$$c_1 = 2T_0\xi_0; \quad c_{11} = 4T_1T_2\xi_1\xi_2.$$

Тогда динамическая ошибка определяется формулой

$$\varepsilon = 2T_0\xi_0 h_1 + 4T_1T_2\xi_1\xi_2 h_1^2 .$$

ВЫВОДЫ

В данной работе предложен спектральный метод расчета переходных процессов замкнутой нелинейной системы, удобный для программирования на ЦВМ. Метод базируется на применении ортогональных функций.

В статье вводится понятие коэффициентов ошибок для нелинейной системы. Коэффициенты ошибок могут быть найдены через соответствующие передаточные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников (ред). Техническая кибернетика, теория автоматического регулирования. Книга 1, «Машиностроение», М., 1967.
2. В. В. Солодовников. Некоторые вопросы теории и принципы построения аналитических самонастраивающихся систем. Сб. «Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления», «Машиностроение», М., 1965.
3. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Применение рядов Вольтерра и обобщенных спектров для анализа и синтеза нелинейных САУ. Гл. XVIII в кн. «Техническая кибернетика», т. 3. «Машиностроение», М, 1969.
4. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Ортогональный метод анализа нелинейных САУ на основе понятия моментов. Тезисы докладов V Всесоюзного научно-технического совещания по созданию и внедрению САУ с применением вычислительной техники, Тбилиси, 1967.
5. В. А. Диткин и А. П. Прудников. Операционное исчисление. Изд. «Высшая школа», М, 1966.
6. Г. Ван-Трис, Синтез оптимальных нелинейных систем управления, Изд. «Мир», 1964.
7. D. A. George, Continuous Nonlinear Systems, Technical Report 355, Research Laboratory of Electronics, MIT, July 22, 1959.