КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

Ю. И. КЛИМНЮК, А. П. КОМАРОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКОГО ПОЛУСВОБОДНОГО СЛЕДА

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

u — скорость вдоль оси X;
v — скорость вдоль оси Y;
$u_{\text{осн. п}}$ — скорость на внешней границе следа (скорость основного потока),
$u_{\text{мин}}$ — скорость на внутренней границе следа;
λ — коэффициент скорости;
T_0 — температура заторможенного потока;
δ — толщина следа (ограниченная струйкой тока, выше которой поток можно рассматривать как поток идеальной жидкости, либо осью свободного следа, либо стенкой в случае полусвободного следа);
δ^*, δ^{**}, δ^{***} — толщины вытеснения, потери импульса и потери энергии;
H^0, H, H^{00} — коэффициенты формы профиля скорости в следе;
K, K^*, K^{**}, K^{***} — коэффициенты изменения условных толщин следа,
$l_{\text{п}}$ — длина пути турбулентного перемешивания;
P — статическое давление;
ρ — статическая плотность;
$\overline{u}_{\text{мин}} = \dfrac{u_{\text{мин}}}{u_{\text{осн.п}}}$ — отношение скорости на внутренней границе следа к скорости основного потока;
$\overline{l} = \dfrac{l}{\delta}$ — отношение линейного размера к толщине следа.

В [2] предложен метод расчета задач свободной турбулентности следа и струи (след см. рис. 1) при наличии продольного градиента давления. Представляет также определенный интерес решение задач полусвободной турбулентности, в которых ось струи или следа совпадает с тонкой пластинкой (рис. 1). К такой задаче может быть сведена задача расчета интегральных характеристик потока за прямым скачком уплотнения в области его взаимодействия с пограничным слоем на пластине, задача расчета течения в двухрядной компрессорной решетке в том случае, когда след от лопатки первого ряда попадает на лопатку второго ряда, а также ряд других инженерных задач.

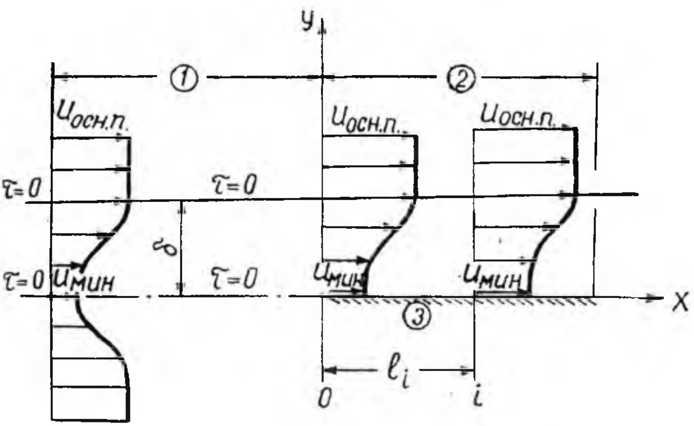

Рис. 1. Схема основных размеров и обозначений плоского полусвободного следа:

1 — свободный турбулентный след; *2* — полусвободный турбулентный след; *3* — стенка.

Целью данной статьи является определение интегральных характеристик полусвободного следа в дозвуковом потоке с продольным градиентом давления.

При определении в рассматриваемом сечении интегральных толщин полусвободного следа пренебрегаем влиянием пограничного слоя, возникающего на ограничивающей стенке, и полагаем, что параметры следа (δ, δ^*, δ^{**}, δ^{***} и $u_{мин}$) в исходном сечении 0—0, а также изменение скорости на внешней границе следа (в основном потоке) известны. Случай, когда в турбулентном следе имеют место обратные течения, не рассматривается.

Метод, использованный в данной статье, аналогичен методу [2], применяемому к задачам свободной турбулентности при наличии продольного градиента давления. Основное отличие задач, рассмотренных в [2] и в данной статье, заключается в том, что для свободной турбулентности длина пути турбулентного перемешивания $l_п$ постоянна во всех точках поперечного сечения, тогда как для полусвободной турбулентности она зависит от расстояния рассматриваемой точки до ограничивающей поверхности. Аналогично методу [2], профиль касательного напряжения в полусвободном следе аппроксимируется полиномом, коэффициенты которого определяются из граничных условий при помощи дифференциальных уравнений движения. Выражение для профиля касательного напряжения в совокупности с той или иной формулой для турбулентного трения позволяет замкнуть задачу и определить профиль скорости и затем характерные толщины полусвободного следа.

Уравнения осредненного плоского турбулентного движения в следе при наличии продольного градиента давления могут быть представлены в виде [1]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=u_{\text{макс}}\frac{du_{\text{макс}}}{dx}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

где τ — касательное напряжение трения между струями осредненного течения.

Для плоского полусвободного следа (фиг. 1) имеем граничные условия:

$$\begin{aligned}
&1.\ \overline{y}=0, \tau=0,\\
&2.\ \overline{y}=1,\ \tau=0,\ \left(\overline{y}=\frac{y}{\delta}\right)\\
&3.\ \overline{y}=0,\ v=0\quad \left(\frac{\partial\tau}{\partial\overline{y}}\right)_0=\delta\rho\left(u_{\text{мин}}\frac{du_{\text{мин}}}{dx}-u_{\text{макс}}\frac{du_{\text{макс}}}{dx}\right),\\
&4.\ \overline{y}=0,\ u=u_{\text{мин}}=f_1(x,\ u_{\text{макс}}),\\
&5.\ \overline{y}=1,\ u=u_{\text{макс}}=f_2(x).
\end{aligned} \tag{2}$$

Касательное напряжение в турбулентном потоке определяется уравнением

$$\tau=\rho\cdot\overline{l}_{\text{П}}^2\left(\frac{\partial u}{\partial\overline{y}}\right)^2. \tag{3}$$

Зависимость длины пути перемешивания $\overline{l}_{\text{П}}$ от $\overline{y}$ в полусвободном следе будет аналогична зависимости $\overline{l}_{\text{П}}$ в турбулентном пограничном слое.

Длина пути турбулентного перемешивания в пограничном слое согласно [6] подчиняется соотношениям:

$$\overline{l}_{\text{П}}=k_0\cdot\overline{y}\ (\text{при } \overline{y}<0{,}2), \tag{4}$$

$$\overline{l}_{\text{П}}=k_0=\text{const}\ (\text{при } \overline{y}>0{,}2). \tag{5}$$

Приближенно закон изменения длины пути перемешивания в сечении турбулентного пограничного слоя получим, аппроксимируя плавной кривой значения длины пути перемешивания для внутренней и внешней областей пограничного слоя, определяемых (4) и (5), например, зависимостью

$$\overline{l}_{\text{П}}=k_1\cdot\sqrt{\overline{y}}. \tag{6}$$

Определив длину пути перемешивания формулой (4), получим закон сопротивления плоской пластины в безградиентном потоке [3]

$$Z = k_0 \cdot \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = k_0 \cdot \alpha - \ln \alpha - 0{,}5 + \ln\left(\frac{\delta}{u}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\right). \tag{7}$$

Закон сопротивления (7) получен путем приравнивания скорости на внешней границе ламинарного подслоя скорости в самом ламинарном подслое.

Для зависимости длины пути перемешивания по формуле (6) также легко получить закон сопротивления плоской пластины в безградиентном потоке

$$Z = k_0 \cdot \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \frac{8}{5} \cdot \frac{k_0}{k_1} + \ln\left(\frac{\delta}{u}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\right). \tag{8}$$

Закон сопротивления (8) получен при совместном решении формулы (3) и формулы (3.4) работы [3] на внешней границе турбулентного пограничного слоя.

Закон сопротивления (7) хорошо подтверждается экспериментом [3]. Коэффициенты κ_0 и α, входящие в формулу (7), являются универсальными константами, не зависящими от числа Рейнольдса и продольного градиента давления. На основании многочисленных опытов показано, что с достаточной для практических целей точностью можно принять [3] $\kappa_0=0{,}4$ и $\alpha=11{,}5$.

Коэффициент κ_1 определим, приравняв правые части (7) и (8)

$$k_1 = \frac{\frac{8}{5} k_0}{k_0 \cdot \alpha - \ln \alpha - 0{,}5} = 0{,}385. \tag{9}$$

Тогда (6) примет вид

$$\overline{l}_{\text{п}} = 0{,}385 \cdot \sqrt{\overline{y}}.$$

Коэффициент κ_1 так же, как и κ_0 и α, является универсальной константой, не зависящей от числа Рейнольдса и продольного градиента давления.

Примем, что в плоском полусвободном следе зависимость касательного напряжения подчиняется формуле (3). Следуя методу Трубчикова [2] и [4], преобразовываем (3) с учетом (6)

$$\tau = \rho \cdot k_1^2 \cdot \overline{y}\,(u_{\text{макс}} - u_{\text{мин}})\frac{\partial u}{\partial \overline{y}}. \tag{10}$$

Соотношение для касательного напряжения, удовлетворяющее граничным условиям плоского полусвободного турбулентного следа, записывается в виде полинома

$$\tau = b_0 + b_1 \cdot \overline{y} + b_2 \cdot \overline{y}^2, \tag{11}$$

где коэффициенты b_0, b_1 и b_2 определяются из граничных условий (2), откуда:

$$\tau = \left(\frac{d\tau}{d\overline{y}}\right)_0 \cdot (\overline{y} - \overline{y}^2) = \left(\frac{d\tau}{d\overline{y}}\right)_0 \cdot f_3(\overline{y}), \tag{12}$$

$$f_3(\overline{y}) = \overline{y} - \overline{y}^2. \tag{13}$$

Приравнивая (10) и (12), получаем зависимость

$$-\delta \cdot f_3(\overline{y})\left[u_{\text{макс}}\frac{du_{\text{макс}}}{dx} - u_{\text{мин}}\frac{\partial u_{\text{мин}}}{\partial x}\right] = k_1^2(u_{\text{макс}} - u_{\text{мин}})\overline{y}\frac{\partial u}{\partial \overline{y}} \cdot \tag{14}$$

После преобразования, введения обозначения

$$f_4(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{\text{макс}}^2 - u_{\text{мин}}^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d(u_{\text{макс}}^2 - u_{\text{мин}}^2)}{dx} \tag{15}$$

и интегрирования, находим

$$u - u_{\text{мин}} = \frac{\delta f_4(x)}{k_1^2(u_{\text{макс}} - u_{\text{мин}})} \cdot \int_0^{\overline{y}} \frac{f_3(\overline{y})}{\overline{y}} d\overline{y}. \tag{16}$$

На внешней границе следа имеем

$$u_{\text{макс}} - u_{\text{мин}} = \frac{\delta f_4(x)}{k_1^2(u_{\text{макс}} - u_{\text{мин}})} \cdot \int_0^1 \frac{f_3(y)}{\overline{y}} d\overline{y}. \tag{17}$$

Поделив (16) на (17), получим форму профиля скорости в плоском полусвободном следе, зависящую только от ординаты:

$$\frac{u - u_{\text{мин}}}{u_{\text{макс}} - u_{\text{мин}}} = \left[\int_0^{\overline{y}} \frac{f_3(\overline{y})}{\overline{y}} d\overline{y}\right] : \left[\int_0^1 \frac{f_3(\overline{y})}{\overline{y}} d\overline{y}\right] = F(\overline{y}), \tag{18}$$

или, разрешая (18) относительно u:

$$\overline{u} = \frac{u}{u_{\text{макс}}} = u_{\text{мин}} + F(\overline{y}) \cdot [1 - \overline{u}_{\text{мин}}]. \tag{19}$$

Соотношениями (18), (19)

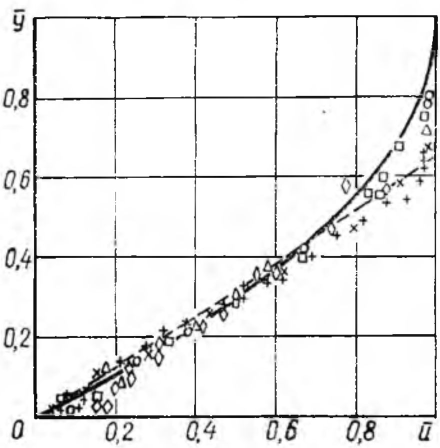

Рис. 2. Профиль скорости в плоском полусвободном следе при отрыве турбулентного пограничного слоя из-за посадки скорости:

1 — расчетный профиль скорости
+ — модель крыла
○ — профиль
△ — модель крыла
□ — модель крыла
◇ — диффузор
× — диффузор.
Эксперимент (8)

определяется универсальный безразмерный профиль скорости для плоского полусвободного следа, который аналогично профилю для следа в спутном потоке [2] не зависит от продольного градиента давления и числа Рейнольдса. Продольный градиент давления будет сказываться лишь на законе изменения скорости $u_{\text{мин}}$ и толщин следа вдоль оси X.

Функция $f_3(\overline{y})$, удовлетворяющая граничным условиям, определяется выражением (13), при этом функция $F(\overline{y})$ равна

$$F\left(\overline{y}\right) = 2\overline{y} - \overline{y}^2. \tag{20}$$

На рис. 2 проведено сравнение профиля скорости (19) с экспериментальным профилем в точке отрыва. Как видно из рисунка, расчетный профиль скорости (19) удовлетворительно подтверждается экспериментальными точками.

Используя универсальный профиль скорости (19), можно определить характерные толщины плоского полусвободного следа в виде функции от $u_{\text{мин}}$.

В общем случае интегральные толщины следа определяются соотношениями:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 (1 - \overline{\rho}\,\overline{u})\,d\overline{y} = 1 - \int_0^1 \overline{\rho}\,\overline{u}\cdot d\overline{y},$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1 (1 - \overline{u})\,\overline{\rho}\,\overline{u}\,d\overline{y} = \int_0^1 \overline{\rho}\,\overline{u}\,d\overline{y} - \int_0^1 \overline{\rho}\,\overline{u}^2\cdot d\overline{y},$$

$$\frac{\delta^{***}}{\delta} = \int_0^1 (1 - \overline{u}^2)\,\overline{\rho}\,\overline{u}\,d\overline{y} = \int_0^1 \overline{\rho}\,\overline{u}\,d\overline{y} - \int_0^1 \overline{\rho}\,\overline{u}^3\,d\overline{y}.$$

В турбулентном пограничном слое при условиях:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial y} = 0 \tag{22}$$

зависимость $\overline{\rho}$ по сечению пограничного слоя записывается следующим образом [1]:

$$\overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\text{осн. п}}} = \frac{T_{\text{осн. п}}}{T} = \frac{1 - a}{1 - a\cdot\overline{u}^2}, \tag{23}$$

$$a = \frac{k-1}{k+1}\cdot\lambda^2. \tag{24}$$

Используем и для плоского полусвободного следа условия (21), (22) и зависимость ρ по (23). Соотношение (23) после разложения в ряд приобретает вид

$$\overline{\rho} = (1 - a)(1 + a\overline{u}^2 + a^2\overline{u}^4 + a^3\overline{u}^6 + a^4\overline{u}^8 + \cdots), \tag{25}$$

позволяющий при интегрировании получить одни и те же формулы как для несжимаемого, так и сжимаемого газа.

Произведя замену переменных

$$1 - \overline{y} = \zeta,$$

$$d\overline{y} = -d\zeta,$$

преобразовываем (19) с учетом (20) к виду

$$\overline{u} = 1 - \zeta^2 (1 - \overline{u}_{\text{мин}})$$

и далее, интегрируя соотношения для характерных толщин, получаем после некоторых упрощений и преобразований выражения для коэффициентов формы профиля скорости в следе:

$$H^0 = \frac{\delta}{\delta^*} = \frac{3}{(1 - \overline{u}_{\text{мин}})[1 + 0{,}5a\,(1 + \overline{u}_{\text{мин}})]}\,, \tag{26}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{2{,}5\,[1 + 0{,}5a\,(1 + \overline{u}_{\text{мин}})]}{(1 + 1{,}5\,\overline{u}_{\text{мин}})\,[1 + 0{,}7a\,(\overline{u}^2_{\text{мин}} - 1)]}\,, \tag{27}$$

$$H^{00} = \frac{\delta^{**}}{\delta^{***}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + 1{,}5\overline{u}_{\text{мин}}}{(1 + \overline{u}_{\text{мин}})^2}\,. \tag{28}$$

Так как при дозвуковых скоростях основного потока в соотношениях H^0, H и H^{00} члены, содержащие коэффициент «а» во второй и больших степенях, незначительны по величине, то ими можно пренебречь.

Степень изменения толщин следа в рассматриваемом сечении относительно толщин некоторого исходного сечения будем называть коэффициентами изменения толщин:

$$K = \frac{\delta_i}{\delta_1}\,, \tag{29}$$

$$K^* = \frac{\delta^*_i}{\delta^*_1} = K \cdot \frac{H^0_1}{H^0_i}\,, \tag{30}$$

$$K^{**} = \frac{\delta^{**}_i}{\delta^{**}_1} = K^* \cdot \frac{H_1}{H_i}\,, \tag{31}$$

$$K^{***} = \frac{\delta^{***}_i}{\delta^{***}_1} = K^{**} \cdot \frac{H^{00}_1}{H^{00}_i}\,. \tag{32}$$

Коэффициенты формы профиля скорости и изменения толщин следа вдоль оси X известны, если известны величина $\overline{u}_{\text{мин}}$ и один из коэффициентов изменения толщин K, K^*, K^{**}, K^{***}. При этом изменение скорости на внешней границе следа также считается известным. Зависимость изменения коэффициента K^{**} при переходе от некоторой исходной точки (точки отрыва) до рассматриваемой точки определяется формулой [1]

$$K^{**} = \frac{\delta_i^{**}}{\delta_1^{**}} = \frac{\rho_1}{\rho_i}\left(\frac{u_{\text{макс }1}}{u_{\text{макс }i}}\right)^{2+0{,}5(H_1+H_i)}$$

Так как рассматривается теплоизолированное течение в следе, то (22)

$$K^{**} = \frac{\rho_1}{\rho_i}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{2+0{,}5(H_1+H_i)} \tag{33}$$

Изменение величины $u_{\text{мин }i}$ в зависимости от продольного градиента скорости и величины расстояния между точкой отрыва и текущей точкой можно найти при подстановке текущей толщины следа δ_i в (17) с учетом (13) и (15)

$$\frac{d}{dx}\left(u^2_{\text{макс }i} - u^2_{\text{мин }i}\right) = -4\,\frac{k_1^2}{\delta_i}\left(u_{\text{макс }i} - u_{\text{мин }i}\right)^2. \tag{34}$$

Текущую толщину следа δ_i можно выразить следующим образом:

$$\delta_i = \delta_1^* \cdot K^{**} \cdot H_i^0 \cdot \frac{H_i}{H_1}. \tag{35}$$

После подстановки в (35) выражений (33), (26) и (27) и разделения членов с $\bar{u}_{\text{мин}}$ и содержащих влияние сжимаемости (λ, a), получаем выражение для δ_i:

$$\delta_i = 3\delta_1^* \cdot \frac{\rho_1}{\rho_i}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{2+0{,}5(H_1+H_i)} \cdot \frac{1+1{,}5\bar{u}_{\text{мин }1}}{(1-\bar{u}_{\text{мин }i})(1+1{,}5\bar{u}_{\text{мин }i})} \cdot \Pi_i, \tag{36}$$

$$\Pi_i = \frac{1+0{,}7a_1\left(\bar{u}^2_{\text{мин }1}-1\right)}{\left[1+0{,}7a_i\left(\bar{u}^2_{\text{мин }i}-1\right)\right]\cdot\left[1+0{,}5a_1\left(1+\bar{u}_{\text{мин }1}\right)^2\right]}.$$

Для несжимаемой жидкости величина Π_i равна единице и не зависит от $\bar{u}_{\text{мин}}$. Для сжимаемой жидкости при дозвуковых скоростях основного потока величина Π_1 близка к единице и слабо меняется с изменением $\bar{u}_{\text{мин}}$. Поэтому примем в дальнейших выкладках выражения (36) эту величину равной среднему значению:

$$\Pi_i = \Pi_{\text{ср}} = 0{,}5(\Pi_1 + \Pi_2),$$

$$\Pi_{\text{ср}} = 0{,}5\cdot\frac{\left[1+0{,}7a_1\left(\bar{u}^2_{\text{мин }1}-1\right)\right]+\left[1+0{,}7a_2\left(\bar{u}^2_{\text{мин }2}-1\right)\right]}{\left[1+0{,}5a_1\left(1+\bar{u}_{\text{мин }1}\right)^2\right]\cdot\left[1+0{,}7a_2\left(\bar{u}^2_{\text{мин }2}-1\right)\right]}. \tag{37}$$

В выражении (36) функция $0{,}5(H_1+H_i)$, входящая в показатель степени члена $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{2+0{,}5(H_1+H_i)}$, меняется в пределах от 2 до 3. В связи с тем, что изменение этой функции в таком диапазоне слабо сказывается на конечном результате решения, примем в дальнейших выкладках выражения (36) эту функцию равной среднему значению $0{,}5(H_1+H_i)\approx 2{,}5$.

При принятых допущениях выражение для δ_i запишется следующим образом:

$$\delta_i = 3\delta_1^* \cdot \frac{\rho_1}{\rho_i}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{4,5} \cdot \frac{1+1,5\overline{u}_{\text{мин }1}}{(1-\overline{u}_{\text{мин }i})\cdot(1+1,5\overline{u}_{\text{мин }i})} \cdot \varPi_{\text{ср}}. \tag{38}$$

После подстановки (38) в (34) и преобразований получаем

$$\frac{d}{dx}\left(u^2_{\text{макс }i} - u^2_{\text{мин }i}\right) = -\frac{4}{3}\cdot\frac{k_1^2}{\delta_1^*}\cdot\frac{\rho_i}{\rho_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{4,5}\cdot u^2_{\text{макс }i} \times$$

$$\times(1-\overline{u}_{\text{мин }i})^3\cdot\frac{1+1,5\overline{u}_{\text{мин }i}}{1+1,5\overline{u}_{\text{мин }1}}\cdot\varPi_{\text{ср}}.$$

Функцию $(1-\overline{u}_{\text{мин }i})^3\cdot(1+1,5\cdot\overline{u}_{\text{мин }i})$ аппроксимируем приближенным выражением

$$(1-\overline{u}_{\text{мин }i})^3\cdot(1+1,5\,\overline{u}_{\text{мин }i}) \approx (1-\overline{u}^2_{\text{мин }i})^5 = \frac{\left(u^2_{\text{макс }i} - u^2_{\text{мин }i}\right)^5}{u^{10}_{\text{макс }i}}.$$

После введения новой переменной $z = u^2_{\text{макс }i} - u^2_{\text{мин }i}$, преобразований и интегрирований с учетом, того что приведенный интеграл приближенно равен

$$\int_0^l \frac{\rho_i}{\rho_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{3,5}\cdot dx \approx 0,5\,l\left[1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{3,5}\right],$$

получаем выражение для скорости на внутренней границе плоского полусвободного следа

$$\overline{u}_{\text{мин}2} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\frac{1-\overline{u}^2_{\text{мин}1}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{3}k_1^2\frac{l}{\delta_1^*}\frac{(1-\overline{u}_{\text{мин}1})^2}{1+\overline{u}_{\text{мин}1}}\left[1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{3,5}\right]\cdot\varPi_{\text{ср}}}}}. \tag{39}$$

Соотношением (39) устанавливается изменение скорости на внутренней границе плоского полусвободного (без обратных токов) следа в зависимости от продольного градиента скорости, скорости в исходной точке и расстояния от исходной точки в калибрах исходной толщины следа. После определения $u_{\text{мин}}$ в рассматриваемом сечении по (26)—(32) рассчитываются все характеристики следа. Вследствие независимости профиля скорости в следе от числа Рейнольдса, следует вывод и о независимости от числа Рейнольдса полученных характеристик следа.

Таким образом, в данной работе получен метод расчета характеристик полусвободного следа как для несжимаемого, так и сжимаемого газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. Госиздат Т. Т. Л. 1950.

2. А. С. Гиневский. Турбулентный след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давления. «Известия Академии наук СССР». ОТН. Механика и машиностроение, № 2, стр. 31, 1959.

3. С. А. Довжик. Профилирование лопаток осевого дозвукового компрессора. ЦАГИ. Промышленная аэродинамика, выпуск 11. Обогонгиз, 1958.

4. Б. Я. Трубчиков. Тепловой метод измерения турбулентности в аэродинамических трубах. Тр. ЦАГИ, выпуск 372, 1938.

5. Хилл, Шауб, Сену. Влияние градиента давлений на турбулентный спутный след. «Прикладная механика» № 4, стр. 50. Труды америк. общ. инженеров-механиков. Рус. пер., изд. «Мир», 1963.

6. В. М. Мищенко. Турбулентный пограничный слой на профиле в решетке. Техническая гидрогазодинамика. Труды ЛПИ № 248. Машиностроение, 1965.

7. Г. Ю. Степанов. Гидродинамика решеток турбомашин. Гос. издат., физ.-мат. литер., 1962.

8. Г. М. Бам-Зеликович. Расчет отрыва пограничного слоя. «Известия АН. СССР», ОТН, № 12, стр. 68. Издат. АН СССР, 1954.