КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

В. В. САЛМИН

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОМБИНИРОВАННОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

В последнее время в литературе [1, 2, 3, 4] обсуждается возможность использования двигательной системы, состоящей из двигателя ограниченной скорости истечения и двигателя ограниченной мощности. В данной работе рассматривается задача оптимизации подобной системы, включающей в себя идеально регулируемый двигатель ограниченной мощности. Постановка задачи оправдана тем, что для выполнения определенного класса маневров с фиксированным временем целесообразно использовать комбинацию двигателей для максимизации полезной нагрузки.

Критерии оптимальности

Рассмотрим работу двигателей в последовательном режиме. Введем релейную функцию $\delta(t)$, которая равна 1 на участке работы двигателя ограниченной скорости истечения (будем называть его двигателем А) и 0 на участке работы двигателя ограниченной мощности (двигателя Б).

Следуя [1], введем обозначения:

$$K(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{a_1\delta}{c_1}\,dt\right); \tag{1}$$

$$L(t) = -\left[\frac{\alpha}{2g}\int_0^t \frac{a_2^2(1-\delta)}{N}\exp\left(-\int_0^t \frac{a_1\delta}{c_1}\,dt\right)dt\right]^{1/2}; \tag{2}$$

здесь a_1 — ускорение, развиваемое двигателем A; a_2 — ускорение, развиваемое двигателем $Б$; c_1 — скорость истечения для двигателя А; N — относительная мощность двигателя Б; α — удельный вес двигателя Б; g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

Как показано в [1], величина полезного груза выражается через $_1 = K(T)$ и $L_1 = L(T)$ следующим образом:

$$\frac{G_{\text{пол}}}{G_0} = \frac{K_1^2}{1 + L_1^2 \frac{G_0}{G_{\text{дв}}}} - \frac{G_{\text{дв}}}{G_0}. \tag{3}$$

Вес двигателя Б принимается пропорциональным максимальной мощности

$$G_{\text{дв}} = \alpha \cdot N_{\max}. \tag{4}$$

Максимум $\frac{G_{\text{пол}}}{G_0}$ достигается при выполнении соотношения

$$\frac{G_{\text{дв}}}{G_0} = - L_1(K_1 + L_1). \tag{5}$$

При этом

$$\frac{G_{\text{пол}}}{G_0} = (K_1 + L_1)^2. \tag{6}$$

Задача о максимуме полезного груза, таким образом, сводится к задаче о максимуме линейной комбинации $K_1 + L_1$.

Величина K характеризует расход топлива двигателем А, величина L — расход топлива двигателем Б.

Вариационная проблема

Запишем вариационную задачу о максимуме полезного груза как задачу Майера о максимуме конечного значения линейной комбинации двух фазовых координат

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = V \\ \dot{\bar{V}} = [a_1\delta + a_2(1 - \delta)]\,\bar{e} + \bar{R} \\ \dot{K} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{K a_1 \delta}{c_1} \\ \dot{L} = \frac{\alpha}{4g} \cdot \frac{K^2 a_2^2 (1-\delta)}{LN} \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $\bar{r}$ — вектор положения аппарата в инерциальной системе отсчета, $\bar{V}$ — вектор скорости, $\bar{R}$ — вектор гравитационного ускорения, $\bar{e}$ — единичный вектор, характеризующий направление управляющего ускорения.

Граничные условия системы (7) даются в следующем виде:

$$\begin{array}{ll} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 & \bar{r}(T) = \bar{r}_1 \\ \bar{V}(0) = \bar{V}_0 & \bar{V}(T) = \bar{V}_1 \\ K(0) = 1 & K(T) + L(T) = \max \\ L(0) = 0 & \end{array} \tag{8}$$

Управляющими функциями системы (7) являются:

$$\begin{array}{ll} \delta(t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & \\ c_1(t){:} & 0 \leqslant c_1 \leqslant c_{1\,\max} \\ N(t){:} & 0 \leqslant N \leqslant 1 \\ \overline{e}(t){:} & |\overline{e}(t)| = 1 \\ a_1(t){:} & 0 \leqslant a_1 \leqslant a_{1\,\max} \\ a_2(t){:} & 0 \leqslant a_2 \leqslant a_{2\,\max} \end{array} \tag{9}$$

Обычно $a_2 \ll a_1$.

Вариационная задача о максимуме комбинации $K_1 + L_1$, решается методом Л. С. Понтрягина [5]. Гамильтониан H и уравнения сопряженной системы имеют вид:

$$H = -p_k \frac{Ka_1\delta}{2c_1} + p_e \frac{\alpha}{4g} \cdot \frac{K^2 a_2^2 (1-\delta)}{LN} + \overline{p}_r \cdot \overline{V} + \\ + \overline{p}_v \{[a_1\delta + a_2(1-\delta)]\,\overline{e} + \dot{\overline{R}}\} \to \inf_{\overline{u} \in \overline{U}(t)} H \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_k = p_k \dfrac{a_1\delta}{2c_1} - p_e \dfrac{\alpha}{2g} \cdot \dfrac{Ka_2^2(1-\delta)}{LN}; \\ \dot{p}_e = p_e \dfrac{\alpha}{4g} \cdot \dfrac{K^2 a_2^2 (1-\delta)}{L^2 N}; \\ \dot{\overline{p}}_r = -\dfrac{\partial}{\partial \overline{r}} (\overline{p}_v \cdot \overline{R}); \quad \dot{\overline{p}}_v = -\overline{p}_r. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь под $\overline{U}(t)$ понимается множество допустимых управлений. Граничные условия системы (11) имеют вид

$$p_k(T) = p_e(T) = -1 \tag{12}$$

Первое и второе уравнения (11) допускают интегрирование в конечном виде [1]; с учетом граничных условий (12) имеем:

$$p_k = \frac{L^2 - K_1 L_1 - L_1^2}{KL_1}; \tag{13}$$

$$p_e = -\frac{L}{L_1}. \tag{14}$$

Оптимальные управления определяются следующим образом:

$$\overline{e}_{\text{opt}} = -\frac{\overline{p}_v}{|\overline{p}_v|}; \tag{15}$$

$$N_{\text{opt}} = 1; \tag{16}$$

$$c_{1\,\text{opt}} = c_{1\,\max}; \tag{17}$$

$$a_{2\,\text{opt}} = -\frac{2\,|\overline{p}_v| \cdot L_1 g}{\alpha K^2} = \overline{a}_2. \tag{18}$$

Управление a_1 входит в гамильтониан H линейно. Для него могут быть оптимальными лишь граничные значения: 0 или $a_{1\max}$. Как показано в [2], особого управления при последовательном режиме работы не возникает.

Для исследования задачи удобно использовать релейное управление $\delta(t)$. Запишем H с учетом (15) — (18) в виде

$$H = D\cdot\delta - \frac{\alpha K^2 a_2^2}{4L_1 g} + \overline{p}_r\cdot\overline{V} + \overline{p}_v\cdot\overline{R} - a_2|\overline{p}_v| \,. \tag{19}$$

Комбинация D называется функцией переключения

$$D = -\frac{L^2 - K_1 L_1 - L_1^2}{L_1}\cdot\frac{a_1}{2c_{1\max}} + \frac{\alpha}{4g}\,\frac{K^2 a_2^2}{L_1} - |\overline{p}_v|\cdot a_1 + |\overline{p}_v|\cdot a_2. \tag{20}$$

Согласно теории [5] для обеспечения $\inf\limits_{\overline{u}\in\overline{U}(t)} H$ необходимо:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 1, \text{ если } D < 0 \\ \delta(t) &= 0, \text{ если } D > 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Выразим из (18) величину $|\overline{p}_v|$ и подставим ее в (20).
В окончательном виде функция переключения запишется в виде

$$D = -\frac{L^2 - K_1 L_1 - L_1^2}{L_1}\cdot\frac{a_1}{2c_{1\max}} + \frac{\alpha K^2 a_1 \overline{a}_2}{2L_1 g} - \frac{\alpha K^2 \overline{a}_2^2}{4L_1 g}\,. \tag{22}$$

Исследование функции переключения

Рассмотрим D на участке $\delta = 1$, то есть там, где $D < 0$. В этом случае величина L постоянна: $L|_{\delta=1} = L_{i0} = \mathrm{const}$

$$D|_{\delta=1} = (K_1 + L_1)\frac{a_1}{2c_{1\max}} + \left(-\frac{L_{i0}^2}{L_1}\cdot\frac{a_1}{2c_{1\max}}\right) + \frac{\alpha K^2 \overline{a}_2}{2L_1 g}\left(a_1 - \frac{\overline{a}_2}{2}\right). \tag{23}$$

Первые два слагаемых — постоянные положительные величины, третье меньше нуля, но возрастает, так как K^2 — убывающая функция, $L_1 < 0$, $\overline{a}_2 \ll a_1$. Следовательно, на участке $\delta = 1$ функция D возрастает, и для рассматриваемой задачи возможен лишь один нуль функции переключения. Функция D может быть отрицательной

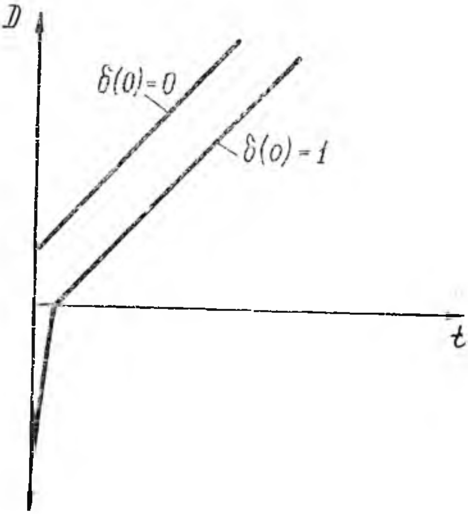

Рис. 1.

только на начальном участке траектории. Характер изменения $D(t)$ показан на рис. 1.

Определим функцию переключения при $t=0$

$$D(0)=\frac{K_1L_1+L_1^2}{l_1}\cdot\frac{a_1(0)}{2c_{1\max}}+\frac{\alpha a_1(0)\,\overline{a_2}(0)}{2L_1g}-\frac{\alpha\,\overline{a}_2^2(0)}{4L_1\,g}. \tag{24}$$

Если $D(0)<0$, то $\delta(0)=1$, то есть должно выполняться условие

$$\frac{(K_1L_1+L_1^2)\,g}{\alpha c_{1\max}}>\frac{\overline{a}_2^2(0)}{2a_1(0)}-\overline{a}_2(0) \tag{25}$$

При введении релейного управления $\delta(t)$ стало возможным отказаться от управления a_1 и принять всюду $a_1=a_{1\max}$. Допуская существование импульсных режимов, примем $a_{1\max}=\infty$. С учетом этого (25) упростится

$$\frac{K_1L_1+L_1^2}{\alpha c_{1\max}}>-\frac{\overline{a_2}(0)}{g}. \tag{26}$$

Выполнение неравенства (26) означает, что в начале движения аппарату должен быть сообщен двигателем А дополнительный импульс скорости.

Алгоритм решения задачи

Из сказанного выше следует вывод, что при использовании комбинированной двигательной системы в последовательном режиме работы оптимальным является включение двигателя А только в начальной точке траектории; вопрос о целесообразности этого включения решается по неравенству (26). Вклад двигателя А можно учесть изменением начальных условий

$$\overline{V}(0)=\overline{V}_0+\Delta\overline{V}. \tag{27}$$

В дальнейшем полагаем в уравнениях (7) $\delta=0$.

Можно получить основную систему уравнений, используя значение a_2 из (18):

$$\left|\begin{aligned}
&\dot{\overline{r}}=\overline{V}\\
&\dot{\overline{V}}=\frac{2L_1g}{\alpha K_1^2}\overline{p_v}+\overline{R}\\
&\ddot{\overline{p}}_v=\frac{\partial}{\partial\overline{r}}(\overline{p_v}\cdot\overline{R})\\
&K_1=\exp\left(-\frac{|\Delta\overline{V}|}{2c_{1\max}}\right)\\
&\frac{L^2}{L_1^2}\int_0^t\frac{2|\overline{p_v}|^2}{\alpha K_1^2}\,dt
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Система (28) решается с граничными условиями (8) и (27). Введение неизвестной величины $\Delta\overline{V}$ требует присоединения к системе (28) дополнительного уравнения. Очевидно, $\Delta\overline{V}$ будет оптимальным только в том случае, когда функция переключения обратится в нуль. С учетом сделанных выше допущений относительно $a_{1\max}$ легко получить это условие из (22)

$$K_1 + L_1 = 2c_1 |\overline{p_v}(0)| . \tag{29}$$

Решение краевой задачи для системы (28) в общем случае требует использования ЭЦВМ, в частных случаях ($R=0$, $\overline{R}=\text{const}$) задача решается аналитически.

Автор выражает признательность В. И. Гурману и В. С. Брусову за ценные советы при обсуждении статьи и В. М. Белоконову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Гроздовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев. Механика космического полета с малой тягой. Наука, 1966.

2. Ю. Н. Иванов. Оптимальное сочетание двигательных систем. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 2, 1964.

3. T. N. Edelbaum. The use of high—and low—thrust propulsion in combination for space missions. Amer. Astron. Soc., prep. 61—104, 1961.

4. W. R. Fimple, An improved theory of the use of high- and low—thrust propulsion in combination. J. Astronaut. Sci., vol. 10, № 10, 1963.

5. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.