КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

В. И. КУЗНЕЦОВ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СТЕНКИ, ПРОРЕЗАННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕРЖНЯМИ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y — координаты;
τ — время;
a_1 и a_2 — коэффициенты температуропроводности стержня и материала стенки;
δ — толщина стенки;
$2l$ — расстояние между стержнями;
α — коэффициент теплоотдачи;
T_a — температура внешней среды;

$$Fo_1 = \frac{a_1 \tau}{\delta^2}; \quad Fo_2 = \frac{a_2 \tau}{\delta^2}.$$

Ограждающие конструкции различного типа наземных сооружений, кабин летательных аппаратов и т. д., как правило, не являются однородными и включают в себя различные элементы арматуры или силового набора фюзеляжа. Это обстоятельство значительно усложняет расчет нестационарного нагрева или охлаждения ограждений, поэтому представляет определенный интерес получение аналитического решения такого рода задач, довольно часто встречающихся на практике.

Рассмотрим плоскую стенку, прорезанную тонкими металлическими стержнями. Считаем, что температурное поле стержней одномерно, между стержнями и материалом стенки существует идеальный тепловой контакт, физические характеристики материала стенки и стержня постоянны.

Рассматриваемая задача сводится к решению следующих уравнений:

$$a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{\partial T_1}{\partial \tau}, \tag{1}$$

$$a_2\left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial T_2}{\partial \tau}, \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями

$$\text{при } \tau=0, \quad T_1=T_2=T_{\text{a}}=T_0=\text{const}, \tag{3}$$

$$\text{при } \tau>0, \quad x=0,\ 0\leqslant y\leqslant l, \quad \alpha_{\text{a}}(T_i-T_{\text{a}})=\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\text{при } \tau>0, \quad x=\delta, \quad 0\leqslant y\leqslant l, \ \alpha_k(T_i-T_0)=-\lambda_{ik}\frac{\partial T_i}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\text{при } \tau\geqslant 0, \quad 0\leqslant x\leqslant\delta, \quad y=0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y}=0, \tag{6}$$

$$\text{при } \tau\geqslant 0, \quad 0\leqslant x\leqslant\delta, \quad y=l, \quad T_1=T_2, \tag{7}$$

где $i=1,\ 2$, причем индекс 1 относится к стержню.

Применяя к уравнению (1) и условиям (3)—(5) преобразование Лапласа

$$\Phi_1(\varepsilon,\ s)\doteqdot\Theta_1(\varepsilon,\ \tau),$$

предварительно введя новые переменные $\varepsilon=\frac{x}{\delta}$, $\eta=\frac{y}{\delta}$, $\Theta_i=\frac{T_i-T_0}{T_{\text{a}}-T_0}$ и преобразовав к безразмерному виду условия (3)—(5), получаем для изображения:

$$\frac{d^2\Phi_1}{d\varepsilon^2}-\frac{s\delta^2}{a_1}\Phi_1=0, \tag{8}$$

$$B_{1\text{a}}\Phi_1(s,0)-\left(\frac{d\Phi_1}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=1}=\frac{1}{e}, B_{1k}\Phi_1(s,1)+\left(\frac{d\Phi_1}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=1}=0, \tag{9}$$

$$B_{1\text{a}}=\alpha_{\text{a}}\frac{\delta}{\lambda_1}, \quad B_{1k}=\alpha_k\frac{\delta}{\lambda_1}.$$

Решение (8) с граничными условиями (9) имеет вид:

$$\Phi_1=B_{1a}\frac{\nu\,\text{ch}\,\nu(1-\varepsilon)+B_{1k}\,\text{sh}\,\nu(1-\varepsilon)}{s\left[(B_{1a}B_{1k}+\nu^2)\,\text{sh}\,\nu+\nu\,(B_{1a}+B_{1k})\,\text{ch}\,\nu\right]}, \tag{10}$$

$$\nu=\sqrt{\frac{s\delta^2}{a_1}}.$$

Решение уравнения (2) выглядит так:

$$\Theta_2(\varepsilon,\ \eta,\ \tau)=\Theta_{20}(\varepsilon)+\Theta_{21}(\varepsilon,\ \eta,\ \tau), \tag{11}$$

$$\Theta_{20}(\varepsilon)=r_0+r_1\varepsilon, \quad r_0=B_{2a}\frac{(1+B_{2k})}{R},$$

$$r_1=-\frac{B_{2a}B_{2k}}{R}, \quad R=B_{2a}+B_{2k}+B_{2a}B_{2k},$$

$$B_{2a}=\beta_a\frac{\delta}{\lambda_2}, \ B_{2k}=\alpha_k\frac{\delta}{\lambda_2}.$$

Функция Θ_{21} удовлетворяет уравнению (2) и условиям:

$$\Theta_{21}(\varepsilon,\ \eta,\ 0)=-(r_0+r_1\varepsilon), \tag{12}$$

$$B_{2_a}\Theta_{21}(0,\ \eta,\ \tau) - \frac{\partial\,\Theta_{21}(0,\eta,\tau)}{\partial\varepsilon} = 0, \tag{13}$$

$$B_{2_k}\Theta_{21}(1,\ \eta,\ \tau) + \frac{\partial\,\Theta_{21}(1,\eta,\tau)}{\partial\varepsilon} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\,\Theta_{21}(\varepsilon,0,\tau)}{\partial\eta} = 0, \quad \Theta_{21}(\varepsilon,\ \overline{l},\ \tau) = \Theta_1(\varepsilon,\ \tau) - r_0 - r_1\varepsilon, \tag{15}$$

где $\overline{l} = \frac{l}{\delta}$.

Применим к уравнению (2) для функции Θ_{21} и условиям (12)—(15) последовательно интегральное преобразование

$$\psi_2 = (\mu,\ \eta,\ \tau) = \int_0^1 \Theta_{21}(\varepsilon,\ \eta,\ \tau)\,X(\mu\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{16}$$

и преобразование Лапласа

$$\Phi_2(\mu,\ s,\ \eta) \doteqdot \psi_2(\mu,\ \eta,\ \tau).$$

Ядро $X(\mu\varepsilon)$ имеет вид

$$X(\mu\varepsilon) = \cos\mu\varepsilon + \frac{B_{2a}}{\mu}\sin\mu\varepsilon, \tag{17}$$

а μ определяется уравнением

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\mu(B_{2a} + B_{2k})}{(\mu^2 - B_{2a}B_{2k})}\ . \tag{18}$$

Для изображения $\Phi_2(\mu,\ s,\ \eta)$ получаем

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\eta^2} - \left(\frac{s\delta^2}{a_2} + \mu^2\right)\Phi_2 = -\frac{\delta^2}{a_2}\psi_0(\mu) \tag{19}$$

с граничными условиями:

$$\left(\frac{\partial\,\Phi_2}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} = 0, \tag{20}$$

$$\Phi_2(\mu,\ s,\ \overline{l}) = F_1(\mu,\ \nu) - \frac{\psi_0(\mu)}{s}\ ,$$

$$\psi_0(\mu) = \int_0^1 (r_0 + r_1\varepsilon)\,X(\mu\varepsilon)\,d\varepsilon, \tag{21}$$

$$F_1(\mu,\ \nu) = \int_0^1 \Phi_1(\nu\varepsilon)\,X(\mu\varepsilon)\,d\varepsilon. \tag{22}$$

Решение (19) с учетом условий (20) имеет вид

$$\Phi_2 = \left[F_1 - \frac{s + \mu^2 + \frac{s\delta^2}{a_2}}{s\left(\mu^2 + \frac{s\delta^2}{a_2}\right)}\psi_0\right]\cdot\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\mu^2 + \frac{s\delta^2}{a_2}}\,\eta}{\operatorname{ch}\sqrt{\mu^2 + \frac{s\delta^2}{a_2}}\,\overline{l}} + \frac{\frac{\delta^2}{a_2}}{\mu^2 + \frac{s\delta^2}{a_2}}\psi_0. \tag{23}$$

Переход от изображения Φ_2 к ψ_2 выполняем по теореме разложения, а обратное преобразование от $\psi_2(\mu, \eta, \tau)$ к оригиналу $\Theta_{21}(\varepsilon, \eta, \tau)$ в соответствии с формулой

$$\Theta_{21} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \psi_2(\mu_n, \eta, \tau)}{L(\mu_n, B_{2a})} X_n(\mu_n \varepsilon), \tag{24}$$

где μ_n — n-ный корень уравнения (18),

$$L(\mu_n, B_{2a}) = (\mu_n^2 + B_{2a}^2)\mu_n + (\mu_n^2 - B_{2a}^2)\cos\mu_n \sin\mu_n + \mu_n B_{2a}(1 - \cos 2\mu_n). \tag{25}$$

Делая необходимые преобразования, получаем:

$$\Theta_{21} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \psi_0(\mu_n)}{L(\mu_n, B_{2a})} X_n(\mu_n \varepsilon) \operatorname{ch}\mu_n \frac{\eta}{\operatorname{ch}\mu_n} \overline{l} +$$

$$+ 2B_{1a} \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(\mu_n \varepsilon) \operatorname{ch}\mu_n \frac{\eta}{\mu_n^2} L(\mu_n, B_{2a}) \operatorname{ch}\mu_n \overline{l} +$$

$$+ \frac{16}{\pi} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^d \left[A_{d,n} \psi_0(\mu_n) X_n(\mu_n \varepsilon) \cos\omega_d \frac{\eta}{\overline{l}} L^{-1}(\mu_n, B_{2a}) \right] \times$$

$$\times \exp\left[-\left(\frac{\omega_d^2}{\overline{l}^2} + \mu_n^2 \right) \mathrm{Fo}_2 \right] + 4 \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^d \left[D_{d,n} \omega_d \mu_n X_n(\mu_n \varepsilon) \times \right.$$

$$\left. \times L^{-1}(\mu_n, B_{2a}) \cos\omega_d \frac{\eta}{\overline{l}} \right] \exp\left[-\left(\frac{\omega_d^2}{\overline{l}^2} + \mu_n^2 \right) \mathrm{Fo}_2 \right] +$$

$$+ 4B_{1a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{m,n} L^{-1}(\mu_n, B_{2a}) X_n(\mu_n \varepsilon) \frac{\operatorname{ch}\gamma_{m,n} \eta}{\operatorname{ch}\gamma_{m,n} \overline{l}} \right] \exp(-\beta_m^2 \mathrm{Fo}_1); \tag{26}$$

$$\psi_0(\mu_n) = r_0 [\sin\mu_n + B_{2a}\mu_n^{-1}(1 - \cos\mu_n)] + r_1 \mu_n^2 [\mu_n(\cos\mu_n +$$

$$+ \mu_n \sin\mu_n - 1) + B_{2a}(\sin\mu_n - \mu_n \cos\mu_n)]; \tag{27}$$

$$A_n = \frac{[\mu_n (B_{2a} + B_{1k})(1 - \cos\mu_n) + (\mu_n^2 - B_{2a}B_{1k})\sin\mu_n + \mu_n B_{2a} B_{1k}]}{(B_{1a}B_{1k} + B_{1a} + B_{1k})}; \tag{28}$$

$$A_{d,n} = \frac{\mu_n [(2d-1)^2 \pi^2 + 2\mu_n^2 \overline{l}^2]}{(2d-1)\{[(2d-1)\pi]^2 + 4(\mu_n \overline{l})^2\}}; \tag{29}$$

$$D_{d,n} = \frac{[\nu_{d,n} \mu_n (B_{2a} + B_{1k})(\cos\nu_{d,n} - \cos\mu_n) + \nu_{d,n}(\mu_n^2 - B_{2a}B_{1k})\sin\mu_n - \mu_n(\nu_{d,n}^2 - B_{1k}B_{2a})\sin\nu_{d,n}]}{(\omega_d^2 + \mu_n^2 \overline{l}^2)(\mu_n^2 + \nu_{d,n}^2)[(B_{1a}B_{1k} + \nu_{d,n}^2)\sin\nu_{d,n} + \nu_{d,n}(B_{1a} + B_{1k})\cos\nu_{d,n}]}; \tag{30}$$

$$C_{m,n} = \frac{[\beta_m \mu_n (B_{2a} + B_{1k})(\cos\beta_m - \cos\mu_n) + \beta_m(\mu_n^2 - B_{1k}B_{2a})\sin\mu_n - \mu_n^2(\beta_m^2 - B_{1k}B_{2a})\sin\beta_m]}{\beta_m(\mu_n^2 - \beta_m^2)[(B_{1a}B_{1k} + B_{1a} + B_{1k} - \beta_m^2)\cos\beta_m - \beta_m(2 + B_{1a} + B_{1k})\sin\beta_m]}; \tag{31}$$

$$\omega_d = (2d-1)\frac{\pi}{2}; \quad \nu_{d,n} = \left[\left(\frac{\omega_d^2}{l^2} + \mu_n^2\right)\frac{a_2}{a_1}\right]^{0,5};$$

β_m — m-ный корень уравнения

$$\operatorname{tg}\beta_m = \frac{\beta_m (B_{1a} + B_{1k})}{(\beta_m^2 - B_{1a}B_{1k})}; \tag{32}$$

$$\gamma_{m,n} = \left(\mu_n^2 - \beta_m^2 \frac{a_1}{a_2}\right)^{0,5}.$$

Температурное поле стенки определяется подстановкой (26) в уравнение (11).

Для стержня уравнение распределения температуры получим, применяя теорему разложения к (10):

$$\Theta_1 = B_{1a}\frac{(1+B_{1k})(1-\varepsilon)}{B_{1a}+B_{1k}+B_{1a}B_{1k}} + 2B_{1a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m\cos\beta_m(1-\varepsilon)+B_{1k}\sin\beta_m(1-\varepsilon)}{\beta_m G(\beta_m, B_{1a}, B_{1k})}\times$$

$$\times\exp(-\beta_m^2\,\mathrm{Fo}_1), \tag{33}$$

$$G = (B_{1a}B_{1k} + B_{1a} + B_{1k} - \beta_m^2)\cos\beta_m - \beta_m(2 + B_{1a} + B_{1k})\sin\beta_m. \tag{34}$$

Здесь β_m — m-ый корень уравнения (10).

Анализ уравнений (26)—(31) показывает, что влияние отдельных слагаемых, входящих в (26), не одинаково, так как коэффициенты температуропроводности материала стенки и стержней значительно отличаются.

Коэффициент температуропроводности стержня на два порядка выше, чем материала стенки. Поэтому пятое слагаемое в уравнении (26) оказывает влияние на распределение температуры стенки лишь в начальный период длительностью порядка 10—20 *сек* и при расчетах его можно не учитывать.

По этой причине величина $\nu_{d,n}$ для первых значений ω_d и μ_n мала, что также значительно облегчает вычисление постоянной $D_{d,n}$.

В большинстве случаев из-за малости B_{1a} и B_{1k} корень B_m будет практически равен значениям $m\pi$, где $m = 1,2,...$ Это облегчает применение полученного решения при конкретных расчетах.