КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

С. М. МАКАРОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ*

В теории устойчивости движения по Ляпунову вопрос об устойчивости по первому приближению является чрезвычайно интересным вопросом как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения практических, технических приложений.

Этому вопросу посвящено, начиная с классических результатов Ляпунова [1], много остроумных и глубоких исследований: Коттона [2], Перрона [3], Четаева [4], Персидского [5], Малкина [6], Красовского [7], Барбашина [8] и др. В этих исследованиях варьировались условия, накладываемые на нелинейные части уравнений возмущенного движения, причем устойчивость как в первом приближении, так и в силу полной системы получалась асимптотическая. Однако с точки зрения технических приложений и теоретически не лишена интереса и обыкновенная, неасимптотическая устойчивость.

Насколько нам известно, такой задачи и условий обыкновенной устойчивости по первому приближению никем не ставилось. В предлагаемой работе выводится новый критерий устойчивости по первому приближению. В этом критерии на линейные уравнения наложены менее жесткие условия, именно, существование просто ограниченных решений, зато на нелинейные части наложены более жесткие условия, которые выясним дальше. Интересно отметить, что о коэффициентах нелинейной части определенные ограничения сделал только Ляпунов, другие авторы просто в целом ограничивали нелинейную часть. В этой работе ослабление условий на решения

* Доклад на Межвузовской конференции по устойчивости механических систем и аэромеханике (МАИ, февраль 1962 г.).

линейной части влечет более жесткие условия на коэффициенты нелинейной части, а именно: они должны быть не только ограниченными, но и исчезающими функциями времени. Такие условия в технике могут часто встречаться, например, при действии на рассматриваемую динамическую систему возмущающих периодических затухающих сил и импульсов. Но если на систему линейных дифференциальных уравнений накладывать условия существования асимптотической устойчивости ее тривиального решения, то устойчивость тривиального решения полной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения может иметь место и при неограниченных коэффициентах нелинейной части.

В работе вводится новое определение устойчивости движения по первому приближению, не противоречащее по существу определению Ляпунова, и дается новый метод доказательства теорем, связанный с первым методом Ляпунова.

1. Пусть дана система n линейных неоднородных дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots + p_{in}x_n + f_i(t), \tag{1.1}$$

где $p_{ik}(t)$ и $f_i(t)$ — ограниченные* непрерывные в интервале $t_0 \leqslant t < \infty$ функции времени t, $t_0 \geqslant 0$ — начальное значение t.

Пусть соответствующая однородная система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots + p_{in}x_n \tag{1.2}$$

имеет фундаментальную систему независимых решений:

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}; \\ x_{12}, & x_{22}, & \ldots, & x_{n2}; \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n}, & x_{2n}, & \ldots, & x_{nn} \end{matrix} \tag{1.3}$$

с начальными условиями при $t = t_0$:

$$\begin{matrix} x_{ii}^{(0)} = 1 \\ x_{ik}^{(0)} = 0 \; (i \neq k) \end{matrix} \tag{1.4}$$

и определителем $\Delta \neq 0$.

Мы будем в дальнейшем рассматривать условия:**

$$| x_{ik}(t, t_0) | < Be^{-\alpha(t-t_0)}; \tag{1.5}$$

$$| x_{ik}(t, t_0) | < B; \tag{1.6}$$

$$| f_i(t) | < Ae^{-\beta(t-t_0)}; \tag{1.7}$$

* В работе рассматриваются и $f_i(t)$ неограниченные функции t, но при этом предполагается существование в некоторой области решения Коши.

** Условия (1.5) рассматривались Персидским [5] в более общей задаче.

$$|f_i(t)| < Ae^{\beta(t-t_0)}, \tag{1.8}$$

где B, α, A, β — некоторые положительные постоянные, не зависящие от t_0, причем $B \geqslant 1$, а в (1.8) $\beta \geqslant 0$.

В случаях (1.5) и (1.7) будем говорить об асимптотической ограниченности функций $x_{ik}(t, t_0)$ и $f_i(t)$, а в случаях (1.6) и (1.8) при $\beta = 0$ — о неасимптотической, обыкновенной ограниченности этих функций в интервале времени $t_0 \leqslant t < \infty$. Докажем две простые теоремы.

Теорема I. Если для фундаментальной системы решений однородной системы уравнений (1.2) выполняются условия (1.5), а для функций $f_i(t)$ условия (1.8), то система уравнений (1.1) допускает только асимптотически ограниченные решения, если $\alpha > \beta$, $\lambda < \frac{\alpha - \beta}{2}$. Для доказательства теоремы проинтегрируем систему (1.1) по методу Коши. Получим следующие формулы для ее интегралов:

$$x_i(t, t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_{ik}(t, t_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} x_{ik}(\tau, t_0) f_k(\tau)\, d\tau, \tag{1.9}$$

где $c_i = x_i(t, t_0) = x_i^{(0)}$ — начальное значение интегралов x_i (t, t_0) при $t = t_0$.

Отсюда получим неравенства:

$$|x_i(t, t_0)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k^{(0)}| \, |x_{ik}(t, t_0)| + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} |x_{ik}(\tau, t_0)| \, |f_k(\tau)|\, d\tau <$$

$$< \delta n B e^{-(t-t_0)} + nAB \int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(\tau-t_0)}\, d\tau = \delta n B e^{-\alpha(t-t_0)} + \tag{1.10}$$

$$+ \frac{nAB}{\alpha - \beta}\left(1 - e^{-(\alpha-\beta)(t-t_0)}\right) < nB\left(\delta + \frac{A}{\alpha - \beta}\right),$$

где $\delta \geqslant |x_k^{(0)}|$, M — наибольшее значение функций $f_k(t)$ на рассматриваемом интервале времени $t_0 \leqslant t < \infty$.

Как видно, асимптотической ограниченности здесь не обнаружено, так как

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t, t_0)| < \frac{nAB}{\alpha - \beta},$$

тогда как при $t = t_0$ $|x_i(t_0, t_0)| < nB\delta$.

Пусть $\varepsilon^{(1)}$ сколько угодно малое произвольное положительное число, тогда из формулы (1.9), которую мы запишем в виде

$$x_i(t, t_0) = \bar{x}_i(t, t_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} x_{ik}(\tau, t_0)\, f_k(\tau)\, d\tau, \tag{1.9}$$

где $\bar{x}_i(t, t_0) = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k^{(0)} x_{ik}(t, t_0)$ — общее решение однородной системы (1.2), мы видим на основании (1.4), что $x_i^{(0)} = \bar{x}_i^{(0)}$, ибо второе слагаемое в (1.9) при $t = t_0$ равно нулю.

Выбирая теперь δ согласно условию

$$\delta < \frac{\varepsilon^{(1)}}{nB}, \tag{1.11}$$

получим

$$| x_i (t, t_0) | < \varepsilon^{(1)} + \frac{nAB}{\alpha - \beta}, \tag{1.10'}$$

что эквивалентно условию (1.10) и доказывает неасимптотическую ограниченность решений системы уравнений (1.1).

Чтобы выявить асимптотическую ограниченность решений x_i, введем новую переменную

$$y_i = x_i \, e^{\lambda(t-t_0)}, \tag{1.12}$$

где λ некоторая положительная постоянная.

Тогда дифференциальные уравнения для переменных y_i будут

$$\frac{dy_i}{dt} = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \cdots + (p_{ii} + \lambda) y_i + \cdots + p_{in}y_n + e^{\lambda(t-t_0)} f_i(t) \tag{1.13}$$

Независимые решения $y_{ik}(t, t_0)$ соответствующих однородных уравнений, определяемые начальными условиями

$$y_{ii}(t_0, t_0) = 1; \; y_{ik}(t_0, t_0) = 0; \quad i \neq k,$$

будут удовлетворять неравенствам

$$| y_{ik}(t, t_0) | < e^{-(\alpha-\lambda)(t-t_0)}, \tag{1.14}$$

а функции $\overline{f}_i(t) = e^{\lambda(t-t_0)} f_i(t)$ — неравенствам

$$| \overline{f} \; (t) | < Ae^{(\beta+\lambda)(t-t_0)}. \tag{1.15}$$

Тогда, как и выше, найдем

$$| y_i(t, t_0) | < \delta nBe^{-(\alpha-\lambda)(t-t_0)} + \frac{nAB}{\alpha - \beta - 2\lambda}\left(1 - e^{-(\alpha-\beta-2\lambda)(t-t_0)}\right),$$

что при условиях $\alpha > \beta$ и $\lambda < \frac{\alpha-\beta}{2}$ доказывает ограниченность решений уравнений (1.13) и в силу формул (1.12) — асимптотическую ограниченность решений уравнений (1.1).

Теорема II. Если для фундаментальной системы решений однородной системы уравнений (1.2) выполняются условие (1,6), а для функции $f_i(t)$ — условие (1.7), то система уравнений (1.1) допускает только ограниченные решения.

На основании формулы (1.9) получаем неравенства

$$| x_i (t, t_0) | < \delta nB + nAB \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(\tau-t_0)} \, d\tau =$$

$$= \delta nB + \frac{nAB}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-t_0)}) < nB\left(\delta + \frac{A}{\beta}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.16}$$

Они и доказывают теорему, причем ограниченность решений системы (1.1) получена также неасимптотическая.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно получить неравенства

$$|x_i(t, t_0)| < \varepsilon^{(1)} + \frac{nAB}{\beta} \tag{1.16'}$$

при прежнем значении входящих сюда символов.

Из сравнения теорем видны их различия и сходство.

Примечание 1°. Если одновременно выполняются условия (1.6) и (1.8), то об ограниченности решений системы (1.1) нельзя сделать положительного заключения. Это легко проверить из неравенств, получаемых из формул (1.9).

Примечание 2°. Если одновременно выполняются условия (1,5) и (1.7), то для $x_i(t, t_0)$ имеет место опять-таки асимптотическая ограниченность, что легко проверить из тех же неравенств, получаемых из формул (1.9).

Примечание 3°. Теоремы можно сформулировать и в другом виде — в терминах второй методы Ляпунова, а именно: в теореме I условия (1.5) заменить существованием для однородной системы знакоопределенной функции Ляпунова $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, допускающей бесконечно малый высший предел и имеющей производную u' функцию, тоже знакоопределенную, знака, обратного знаку u, а в теореме II условия (1.6) можно заменить существованием знакоопределенной функции Ляпунова и с производной u' знакопостоянной функцией знака, обратного знаку u, или тождественно равной нулю.

2. Поставим теперь следующую задачу: ослабив условия на линейную часть дифференциальных уравнений возмущенного движения, указать такие условия, ограничивающие коэффициенты нелинейной части, при которых по устойчивости (обыкновенной или асимптотической) тривиального решения уравнений первого приближения можно сделать положительное заключение об устойчивости тривиального решения полных дифференциальных уравнений возмущенного движения.

Пусть дана система дифференциальных уравнений первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots + p_{in}x_n + \sum P_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{2.1}$$

где p_{ik}, $P_i^{(m_1, \ldots, m_n)}$ — непрерывные, ограниченные* вещественные функции вещественного переменного t для всех $t \geqslant t_0$ (t_0 — начальное значение t), а сумма распространена на целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$, подчиняющиеся условию

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = l \quad (l = 2, 3, \ldots)$$

---

* В работе рассматриваются и неограниченные коэффициенты $P_i^{(m_1, \ldots, m_n)}$, но при условии существования решения Коши в области (2.2)

Полученные результаты излагаются для $l=2$, хотя метод применим и в общем случае, т. е., для какого угодно конечного l. Случай бесконечного l не рассматривается.

Для системы (2.1) будем предполагать существование равномерно — непрерывно относительно t_0 и x_i^0 решения Коши в некоторой области

$$|x_i| \leqslant H, \quad t \geqslant t_0, \tag{2.2}$$

где H — некоторая постоянная.

Пусть система дифференциальных уравнений первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots + p_{in}x_n \tag{2.3}$$

имеет фундаментальную систему решений $x_{ik}(t, t_0)$, определяемую начальными условиями:

$$x_{ii}(t_0, t_0) = 1; \quad x_{ik}(t_0, t_0) = 0 \quad (i \neq k).$$

Введем обозначение $P^{(2)} = \max \left\{ \sum_2 \left| P_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| \right\}$ — наибольшее значение суммы модулей коэффициентов $P_i^{(m_1, m_2 \ldots, m_n)}$ в интервале $t_0 \leqslant \leqslant t < \infty$.

Теорема 1. Если для уравнений первого приближения (2.3) при любом $t_0 \geqslant 0$ и $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|x_{ik}| < B, \tag{2.4}$$

а для уравнений (2.1) неравенства

$$P^{(2)} < Ae^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{2.4'}$$

где B, A, α — некоторые постоянные, не зависящие от t_0, то невозмущенное движение для уравнений (2.1) — устойчиво при условиях:

$$B \geqslant 1; \quad A > 0; \quad \alpha > 0; \quad \frac{\varepsilon^{(1)} nAB}{\alpha} < 1, \tag{2.5}$$

где $\varepsilon^{(1)}$ произвольно задаваемое сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. Будем интегрировать систему (2.1) методом последовательных приближений, полагая, как у Ляпунова,

$$x_i = x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + \cdots + x_i^{(m)} + \cdots \tag{2.6}$$

и рассматривая $x_i^{(m)}$ и $\frac{dx_i^{(m)}}{dt}$ как величины одного измерения. Подставляя ряды (2.6) в уравнения (2.1) и приравнивая члены одинакового измерения, получим системы уравнений:

$$\frac{dx_i^{(1)}}{dt} = p_{i1} x_1^{(1)} + p_{i2} x_2^{(1)} + \cdots + p_{in} x_n^{(1)} \tag{2.7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_i^{(m)}}{dt} = p_{i1} x_1^{(m)} + p_{i2} x_2^{(m)} + \cdots + p_{in} x_n^{(m)} +$$

$$+\sum_{2} P_i^{(m_1, m_2 \dots, m_n)} \sum_{s, r=1}^{n} (x_s^{(1)} x_r^{(m-1)} + x_s^{(2)} x_r^{(m-2)} + \dots + x_s^{(m-1)} x_r^{(1)}),$$

. . . .

$$(m = 2, 3, \dots) \tag{2.8}$$

Вид нелинейных членов в уравнениях (2.8) устанавливается методом математической индукции.

Интегрируя по методу Коши систему (2.8), получаем:

$$x_i^{(1)}(t, t_0) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)} x_{ik}(t, t_0) \tag{2.9}$$

. . . .

$$x_i^{(m)}(t, t_0) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} x_{ik}(\tau, t_0) \sum_{2} P_k^{(m_1, \dots, m_n)} \sum_{s, r=1}^{n} (x_s^{(1)} x_r^{(m-1)} + x_s^{(2)} x_r^{(m-2)} + \dots + x_s^{(m-1)} x_r^{(1)}) d\tau, \tag{2.10}$$

где $x_i^{(0)} = x_i^{(1)}(t_0, t_0) = x_i(t_0, t_0)$

Дадим следующее определение устойчивости движения. Пусть $\varepsilon^{(1)}$ — произвольно задаваемое сколь угодно малое положительное число. Если возможно найти два достаточно малые положительные числа δ и ε, зависящие от $\varepsilon^{(1)}$ и такие, чтобы при существовании в момент $t = t_0$ неравенства

$$| x_i^{(0)} | \leqslant \delta \tag{2.11}$$

выполнялись для всякого $t > t_0$ неравенства

$$| x_i^{(1)} | < \varepsilon^{(1)}, \tag{2.12}$$

$$| x_i | < \varepsilon, \tag{2.13}$$

то невозмущенное движение устойчиво и в первом приближении и в силу полных уравнений, т. е. устойчиво по первому приближению.

Допустим, что при произвольно заданном $\varepsilon^{(1)}$ найдено δ такое, что неравенства (2.11) и (2.12) выполняются. Покажем, что при этом выполняются и неравенства (2.13). Для этого построим ε в функции от $\varepsilon^{(1)}$ в виде степенного ряда

$$\varepsilon = a_1 \varepsilon^{(1)} + a_2 \varepsilon^{(1)2} + \dots + a_m \varepsilon^{(1)m} + \dots \tag{2.14}$$

Коэффициенты этого ряда a_m будем определять из оценок $|x_i^{(m)}|$ в формулах (2.6) и на основании формул (2.9), (2.10), (2.12) и условия (2.4).

Таким образом, получим ряд неравенств:

$$| x_i^{(1)} | < \varepsilon^{(1)}$$

$$| x_i^{(2)} | < \varepsilon^{(1)2} \cdot \frac{nAB}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_0)})$$

$$|x_i^{(m)}| < \varepsilon^{(1)m}\left[\frac{nAB}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(t-t_0)}\right)\right]^{m-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.15)$$

Методом полной математической индукции доказывается справедливость неравенств (2.15) для любого $m=2, 3,\ldots$ Ряд (2.14) имеет вид

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{(1)m}\left[\frac{nAB}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(t-t_0)}\right)\right]^{m-1} \qquad (2.16)$$

или при $t \to \infty$

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{(1)m}\left(\frac{nAB}{\alpha}\right)^{m-1} \qquad (2.17)$$

Коэффициенты этого ряда будут

$$a_m = \left(\frac{nAB}{\alpha}\right)^{m-1} \qquad (2.18)$$

Ряды (2.16) и (2.17) — это бесконечные геометрические прогрессии, сходящиеся при условии

$$\varepsilon^{(1)}\frac{nAB}{\alpha} < 1 \qquad (2.19)$$

Условие (2.19) при заранее заданных величинах B, A и α позволяет определить область устойчивости — вопрос очень важный в приложениях. Если же задано $\varepsilon^{(1)}$, то (2.19) определяет условия на эти величины.

Сумма ряда (2.17)

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon^{(1)}}{1-\dfrac{\varepsilon^{(1)}nAB}{\alpha}} \qquad (2.20)$$

и так как при $\varepsilon^{(1)} \to 0$ имеем $\varepsilon \to 0$, то всегда можно удовлетворить неравенству

$$\varepsilon < H. \qquad (2.21)$$

Из сравнения ряда (2.14) и ряда

$$|x_i| \leqslant |x_i^{(1)}| + |x_i^{(2)}| + \cdots + |x_i^{(m)}| + \cdots \qquad (2.22)$$

получим неравенство

$$|x_i| < \varepsilon, \qquad (2.13)$$

что и доказывает теорему.

Теорема 2. Если для уравнений первого приближения (2.3) при любом $t_0 \geqslant 0$ и $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|x_{ik}| < Be^{-\beta(t-t_0)}, \qquad (2.23)$$

а для уравнений (2.1) неравенство

$$P^{(2)} < Ae^{\alpha(t-t_0)}, \qquad (2.23')$$

где $B \geqslant 1$, β, A и $\alpha \geqslant 0$ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от t_0, то невозмущенное движение для уравнений (2.1) асимптотически устойчиво при условиях

$$\alpha < \beta; \quad \frac{\varepsilon^{(1)} n A B}{\beta - \alpha} < 1 \quad (2.24), \quad \text{где } \lambda < \beta \tag{2.25}$$

некоторая положительная постоянная, подчиненная неравенству (2.25), а $\varepsilon^{(1)}$ — произвольно задаваемая сколь угодно малая положительная постоянная.

Доказательство. Положим

$$y_i = x_i \, e^{\lambda(t-t_0)} \tag{2.26}$$

Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения для переменных y_i будут иметь вид

$$\frac{dy_i}{dt} = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \cdots + (p_{i_i} + \lambda)\, y_i + \cdots + p_{in}y_n +$$
$$+ \sum_2 e^{-\lambda(t-t_0)} \, P_i^{(m_1, \ldots, m_n)} \, y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n}, \tag{2.27}$$

а решения $y_{ik}(t, t_0)$ соответствующих линейных уравнений, определяемые начальными условиями:

$$y_{ii}(t_0, t_0) = 1, \quad y_{ik}(t_0, t_0) = 0, \quad (i \neq k)$$

будут удовлетворять неравенствам

$$|\, y_{ik}(t, t_0) \,| < Be^{-(\beta-\lambda)(t-t_0)} \tag{2.28}$$

и кроме того

$$\overline{P}^{(2)} = e^{-\lambda(t-t_0)} \, P^{(2)} < Ae^{(\alpha-\lambda)(t-t_0)} \tag{2.29}$$

Устойчивость движения для переменных y_i при условиях (2.28), (2.29), (2.24) и (2.25) доказывается, как и выше. Тогда на основании (2.26) доказана асимптотическая устойчивость по отношению к переменным x_i.

Примечание. 1. Тем же методом можно доказать теорему об асимптотической устойчивости движения, если выполняются условия:

$$|\, x_{ik}(t, t_0) \,| < Be^{-\beta(t-t_0)}, \quad P^{(2)} < Ae^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.30}$$

$$\text{и} \quad B \geqslant 1, \quad \beta > 0, \quad A > 0, \quad \alpha \geqslant 0 \tag{2.31}$$

$$\frac{\varepsilon^{(1)} n A B}{\alpha + \beta} < 1 \tag{2.32}$$

$$\lambda < \beta \tag{2.33}$$

Примечание 2. Теорема 2 § 2 будет справедлива, если выполняются неравенства:

$$|\, x_{in} \,| < Be^{-\beta(t-t_0)}, \quad P^{(2)} < A[a + \alpha(t - t_0)]^N, \tag{2.34}$$

$$\frac{\varepsilon^{(1)} nAB}{\beta-\gamma} < 1, \tag{2.35}$$

где $B \geqslant 1$, $\beta > 0$, $A > 0$, $\gamma < \beta$, $\alpha > 0$, $a > 0$ и N — целое положительное число — не зависят от t_0. Всегда можно найти $\gamma < \beta$ такое, что будет

$$|a + \alpha(t - t_0)|^N < e^{\gamma(t-t_0)} \tag{2.36}$$

Подставляя последнее неравенство в (2.35), докажем теорему.

Примечание 3. Обе теоремы могут быть сформулированы иначе — в терминах II методы Ляпунова, а именно: в теореме 1 условие $|x_{ik}| < B$ должно быть заменено существованием знакоопределенной функции $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющей знакопостоянную производную V' знака, обратного знаку V, или тождественно равную нулю; в теореме 2 условие $|x_{ik}| < Be^{-\beta(t-t_0)}$ должно быть заменено существованием знакоопределенной функции $V(t, x_1 x_2, \ldots, x_n)$, допускающей бесконечно малый высший предел и имеющей знакоопределенную производную V' знака, обратного знаку V.

Примечание 4. Очевидно, что можно все полученные результаты перевести на язык характеристических чисел, и теорема 1 § 2, например, утверждает, что характеристические числа независимых решений $x_{ik}(t, t_0)$ могут быть все или частично равны нулю, а теорема 2 § 2 говорит о том, что характеристические числа коэффициентов нелинейных членов уравнений (2.1) могут быть даже отрицательными, при соблюдении, конечно, условий существования для системы (2.1) решения Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, М—Л. 1935.
2. E. Cotton, Sur les solution asymptotiques des équation differentielles Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. t. 28, 1911.
3. O. Perron, Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Mathem. Zeitschrift. t. 32, 1930.
4. Н. Г. Четаев. О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем. ПММ т. XII в 5, 1948 г. Теорема о неустойчивости для правильных систем ПММ, т. XII. в. 5, 1944.
5. К. П. Персидский. Об устойчивости по 1-му приближению. Матем. сб., т. 40, 3.
6. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ. М—Л., 1952.
7. Н. Н. Красовский. Об устойчивости по I-му приближению. ПММ, т. XIX, в 5, 1955.
8. Е. А. Барбашин и М. А. Скалкина. К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XIX, в. 5, 1955.