КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

В. М. ГОЛОВИН

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ДИССИПАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НА ТЕПЛООБМЕН ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

В работе дается решение задачи Гретца—Нуссельта при краевых условиях 3 рода с учетом диссипации механической энергии. Приводится сопоставление результатов с данными работы [1], в которой диссипативный эффект не учитывался.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

T — температура жидкости;
T_1 — температура жидкости на входе в трубу;
T_0 — температура окружающей среды;
V — скорость течения;
W — средняя по объемному расходу Q скорость;
ρ, c, λ, μ — соответственно плотность, теплоемкость, теплопроводность и динамическая вязкость жидкости;
Re — число Рейнольдса;
Pe — число Пекле;
λ_w и δ — теплопроводность и толщина стенок трубы;
α — внешний коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности стенок в окружающую среду;
k — коэффициент теплопередачи

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\delta}{\lambda_w};$$

$\mathrm{Nu}_k = \dfrac{kd}{\lambda}$ — граничное число Нуссельта;

$D = \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right) W^2$ — диссипативный фактор;

$\vartheta_1 = T_1 - T_0 > 0$ — начальный температурный напор;

$R = \dfrac{d}{2}$ — радиус трубы.

При постоянных теплофизических характеристиках жидкости задача об установившемся ламинарном движении ее в круглой цилиндрической трубе с теплообменом формулируется следующей системой уравнений и краевых условий:

$$V = 2W\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \tag{1}$$

$$\rho c V\,\frac{\partial T}{\partial z} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{dv}{dr}\right)^2; \tag{2}$$

$$T\,|_{z=0} = T_1;\; k(T - T_0)|_{r=R} = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} \text{ при } z > 0;\; \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{=\infty} = 0 \tag{3}$$

(здесь r, z — цилиндрические координаты. Ось z направлена по оси трубы в сторону течения).

Вводя вместо T новую функцию

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{\vartheta_z}{\vartheta_1},$$

а вместо r и z новые аргументы

$$\xi = \frac{r^2}{R^2}, \quad \zeta = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\cdot\frac{z}{R}$$

и, пренебрегая при больших числах Пекле аксиальной теплопроводностью, описываемой слагаемым $\frac{1}{\mathrm{Pe}^2}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2}$, преобразуем систему (1) — (3) в систему:

$$(1 - \xi)\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta} = 4\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right) + 16\widetilde{D}\xi; \tag{4}$$

$$\vartheta|_{\zeta=0} = 1;\; -\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=1} = \frac{\mathrm{Nu}_k}{4}\,\vartheta|_{\xi=1} \text{ при } \zeta > 0;\; \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} = 0;\; \frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=\infty} = 0, \tag{5}$$

где $\widetilde{D} = \frac{D}{\vartheta_1}$ — приведенный диссипативный фактор.

Решение уравнения (4) может быть представлено в виде суммы двух функций

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_*, \tag{6}$$

из которых ϑ_0 удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (4) и краевым условиям (5), а ϑ_* — исходному уравнению (4) и краевым условиям:

$$\vartheta_*\,|_{\zeta=0} = 0;\; -\frac{\partial\vartheta_*}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=1} = \frac{\mathrm{Nu}_k}{4}\,\vartheta_*|_{\xi=1} \text{ при } \zeta > 0;\; \frac{\partial\vartheta_*}{\partial\xi} = \bigg|_{\xi=0} 0,\; \frac{\partial\vartheta^*}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=\infty} = 0.$$

За исключением обозначений, ϑ_0 совпадает с решением, приведенным в [1] и представляется в виде ряда по собственным функциям $p_n(\xi)$

$$\vartheta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\beta_n^2 \zeta)\, p_n(\xi), \tag{7}$$

где β_n — собственные значения вырожденного гипергеометрического уравнения

$$xy'' + (1-x)\,y' - \alpha_n\, y = 0;$$

$$x = \beta_n \xi; \quad \alpha_n = \frac{2-\beta_n}{4},$$

решением которого, конечным на оси трубы ($\xi = 0$), является функция Похгаммера:

$${}_1F_1(\alpha_n;\ 1;\ \beta_n \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n)_m}{(m!)^2} (\beta_n \xi)^m;$$

$$(\alpha_n)_0 = 1; \quad (\alpha_n)_m = \alpha_n(\alpha_n + 1) \ldots (\alpha_n + m - 1);$$

$$p_n = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta_n \xi\right) {}_1F_1(\alpha_n;\ 1;\ \beta_n \xi). \tag{8}$$

Собственные значения β_n находятся из краевого условия на стенке трубы, сводящегося к трансцендентному уравнению

$$\beta_n \left[\frac{1}{2} - \alpha_n \frac{{}_1F_1(\alpha_n + 1;\ 2;\ \beta_n)}{{}_1F_1(\alpha_n;\ 1;\ \beta_n)}\right] = \frac{\mathrm{Nu_к}}{4}. \tag{9}$$

Коэффициенты A_n ряда (7) определяются из условия на входе в трубу по формуле:

$$A_n = \frac{\int_0^1 g p_n(\xi)\, d\xi}{\int_0^1 g p_n^2(\xi)\, d\xi} = \frac{\mathrm{Nu_к}}{\beta_n^2} p_n(1) \cdot \frac{1}{N_n^2} = \frac{A_n'}{N_n^2}. \tag{10}$$

Решение ϑ_* также представляется рядом по тем же собственным функциям:

$$\vartheta_* = \overline{D} \left\{ \left[(1-\xi^2) + \frac{8}{\mathrm{Nu_к}}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-\beta_n^2 \zeta)\, p_n(\xi) \right\} \tag{11}$$

$$E_n = B_n - A_n \left(1 + \frac{8}{\mathrm{Nu_к}}\right),$$

в котором коэффициенты B_n определяются из условия на входе в трубу по формуле:

$$B_n = \frac{\int\limits_0^1 g\xi^2 p_n(\xi)\, d\xi}{\int\limits_0^1 g\; p_n^2(\xi)\, d\xi} = \frac{B_n'}{N_n^2}\,. \tag{12}$$

$$g = 1 - \xi;$$

Таким образом, решением уравнения (4) при краевых условиях (5) является функция:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_* = \widetilde{D}\left[(1-\xi^2) + \frac{8}{\mathrm{Nu_к}}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(-\beta_n^2 \zeta)\, p_n(\xi); \tag{13}$$

$$C_n = A_n + \widetilde{D}E_n.$$

Таблица 1

	$\mathrm{Nu_к} = \infty$			$\mathrm{Nu_к} = 40$		
n	0	1	2	0	1	2
β_n	2,7044	6,6790	10,6734	2,6069	6,5098	10,4500
$2\beta_n^2$	14,63	89,22	227,8	13,59	84,76	218,4
A_n'	0,2774	—0,0605	0,0276	0,2900	—0,0596	0,0261
B_n'	0,0231	—0,0227	0,0167	0,0264	—0,0251	0,0179
N_n^2	0,1879	0,0750	0,0469	0,199	0,0782	0,0484
A_n	1,476	—0,806	0,589	1,457	—0,763	0,538
B_n	0,123	—0,302	0,357	0,133	—0,321	0,371
E_n	—1,353	0,504	—0,232	—1,614	0,595	—0,275
$p_n(1)$	0	0	0	0,0493	—0,0632	0,0712
	$\mathrm{Nu_к} = 4$			$\mathrm{Nu_к} = 1$		
n	0	1	2	0	1	2
β_n	2,0000	5,7439	9,6450	1,2716	5,2951	9,3063
$2\beta_n^2$	8,0000	65,99	186,0	3,236	56,07	173,2
A_n'	0,368	—0,0403	0,0130	0,443	—0,0161	0,00430
B_n'	0,0467	—0,0323	0,0187	0,0673	—0,0328	0,0188
N_n^2	0,284	0,0902	0,0528	0,396	0,0940	0,0536
A_n	1,295	—0,447	0,246	1,12	—0,171	0,0801
B_n	0,164	—0,358	0,353	0,170	—0,349	0,351
E_n	—3,721	0,982	—0,385	—9,91	1,19	0,370
$p_n(1)$	0,368	—0,333	0,303	0,717	—0,451	0,372

$\widetilde{D}=0,12$

		$Nu_к=\infty$	$Nu_к=40$	$Nu_к=4$	$Nu_к=1$
C_n	C_0	1,314	1,263	0,849	—0,070
	C_1	—0,735	—0,691	—0,329	—0,028
	C_2	0,561	0,505	0,200	0,036
G_n	G_0	0,73	0,734	0,625	—0,062
	G_1	0,089	0,082	0,027	—0,001
	G_2	0,031	0,026	0,005	0,000

Величина среднего по объемному расходу температурного напора в различных сечениях трубы получается равной:

$$\frac{\overline{\vartheta}_z}{\vartheta_1}=\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{Nu_к}\right)\widetilde{D}+\sum_{n=0}^{\infty}G_n\exp(-\beta_n^2\zeta); \tag{14}$$

$$G_n=2A'_n\,C_n.$$

Температурный градиент на внутренней поверхности стенки и число Нуссельта определяются формулами:

$$\frac{1}{\vartheta_1}\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{1}{d}\left[8\widetilde{D}+Nu_к\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(1)\exp(-\beta_n^2\zeta)\right]; \tag{15}$$

$$Nu(z)=\frac{a_1 d}{\lambda}=\frac{8\widetilde{D}+Nu_к\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_np_n(1)\exp(-\beta_n^2\zeta)}{\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{Nu_к}\right)\widetilde{D}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}G_n\exp(-\beta_n^2\zeta)}. \tag{16}$$

При этом для предельного числа Нуссельта имеет место выражение

$$Nu(\infty)=\frac{48Nu_к}{5Nu_к+48}. \tag{17}$$

Значения β_n, $2\beta_n^2$, A_n', B_n', N_n^2, A_n, B_n, E_n, $p_n(1)$, рассчитанные для $n=0, 1, 2$ и $Nu_к=\infty$, 40, 4, 1, приведены в таблице 1, а значения C_n и G_n при $\widetilde{D}=0{,}12$ и тех же n и $Nu_к$—в таблице 2.

На рис. 1 представлены кривые $\frac{\overline{\vartheta}_z}{\vartheta_1}=\varphi(z)$ при $Nu_к=40$, 4, 1 и $\widetilde{D}=0{,}12$. На том же рисунке пунктиром изображены кривые $\frac{\overline{\vartheta}_z}{\vartheta_1}=\varphi_0(z)$, соответствующие решению работы [1].

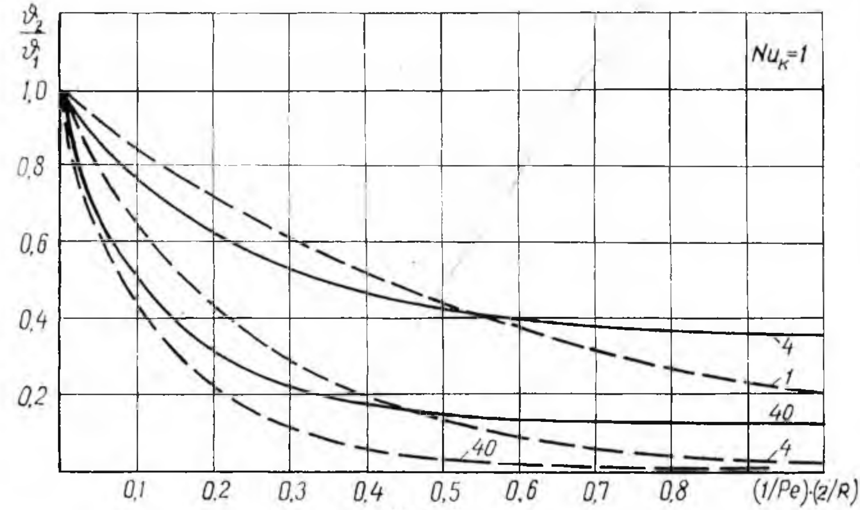

Рис. 1.

На рис. 2 показано изменение предельного значения числа Nu(∞) в зависимости от $Nu_к$ как с учетом, так и без учета диссипативного нагрева (пунктир).

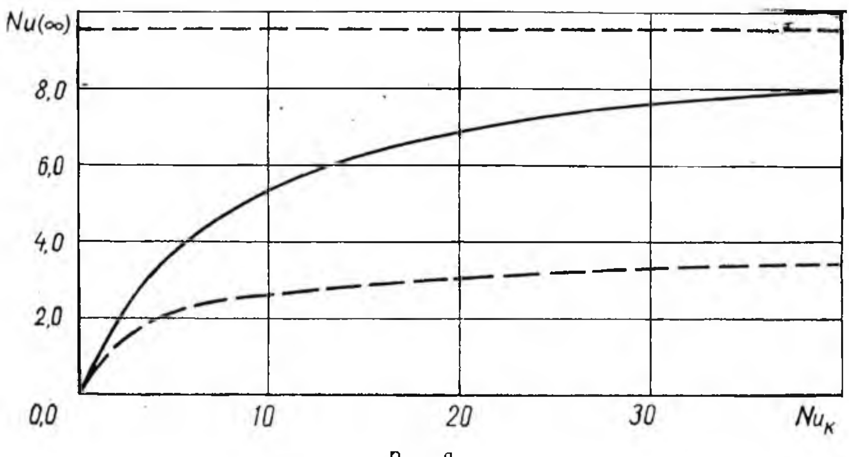

Рис. 2.

Как и следовало ожидать, анализ полученных результатов подтверждает то физически очевидное обстоятельство, что по мере роста степени теплоизоляции роль рассеяния механической энергии в механизме теплообмена ламинарного потока в трубе с окружающей средой возрастает.

Существенным является то, что температурное поле на достаточном удалении от входа при данном $Nu_к$ определяется исключительно величиной диссипативного фактора D. Поэтому пренебрежение им при расчете средних по сечению температур в длинных трубопроводах, как явствует из рис. 1, приводит к значительным ошибкам.

Более того, для каждого $Nu_к$ существует такое $\widetilde{D}$ (а следовательно, и D)

$$\widetilde{D} \geqslant \frac{1}{\frac{5}{6} + \frac{8}{Nu_к}},$$

при котором характер процесса коренным образом меняется, и жидкость после первоначального охлаждения на сравнительно коротком входном участке начинает вновь разогреваться, достигая вдали от входа температур, даже превышающих начальную. Так, при $Nu_к = 1$ и $D = 0{,}12$ начальная температура восстанавливается уже при

$$\frac{1}{Pe} \frac{z}{R} \approx 0{,}005. \qquad (18)$$

Этот случай имеет, например, место при прокачивании машинного масла с начальной температурой $T_1 = 80°C$ в трубе диаметром $d = 0{,}005$ м и с расходом $Q = 6{,}5$ л/мин, что соответствует скорости $W = 5{,}5$ м/сек.

Согласно данным [2] (стр. 615) теплофизические характеристики масла при $T_1 = 80°C$ следующие:

$$\nu = 0{,}375 \cdot 10^{-4} \frac{м^2}{сек}, \quad \mu = 32{,}6 \cdot 10^{-4} \frac{кгсек}{м^2},$$

$$\lambda = 0{,}119 \frac{ккал}{м\ час\ °C}, \quad Pr = 490.$$

При скорости $W = 5{,}5 \frac{м}{сек}$ число Рейнольдса $Re = 735$, число $Pe = 3{,}6 \cdot 10^5$, приведенный диссипативный фактор при температуре окружающей среды $T_0 = 20°C$, $\widetilde{D} = 0{,}12$. В соответствии с (18) начальная температура восстанавливается на расстоянии 900 калибров от входа.

Рассмотренный пример в достаточной мере ясно показывает необходимость учета диссипативного эффекта при расчете теплообменных аппаратов и иных технических устройств, особенно в тех случаях, когда из-за заращивания проходных сечений труб смолистыми или иными отложениями первоначальные параметры и, в частности, $Nu_к$ могут изменяться в довольно широких пределах.

ВЫВОДЫ

1) Получено аналитическое решение задачи о теплообмене ламинарного потока жидкости в трубе с окружающей средой при

краевых условиях третьего рода во всем диапазоне их изменения с учетом диссипации механической энергии.

2) Показано, что по мере роста степени теплоизоляции потока роль диссипации механической энергии в механизме теплообмена возрастает.

3) На численном примере проиллюстрирована важность учета диссипативного эффекта при расчете теплообменников, особенно в случае облитерации их каналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Schenk and Dumoré. «Appl. Sci Res» A, s 405. 1954,

2. Э. Р. Эккерт и Р. М. Дрейк. «Теория тепло- и массообмена». Госэнергоиздат. 1961.