

А. К. ЧИКУРИН

К ВОПРОСУ О РАЗВИТИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПРОДОЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

До настоящего времени еще нет достаточно завершенной теории турбулентного пограничного слоя даже для случая безградиентного течения. Поэтому потребность в практическом методе расчета вызвала появление целого ряда полуэмпирических теорий турбулентности, из которых наибольшее распространение получила теория Прандтля, где для связи касательных напряжений со скоростями деформаций используется идея о существовании «пути смещения».

В настоящей работе для получения профиля скоростей в турбулентном пограничном слое с продольным градиентом давления применяется представление касательных напряжений в виде полинома [1] и известная формула Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \frac{du}{dy} \left| \frac{dv}{dy} \right|, \quad (1)$$

где τ — касательное напряжение, ρ — массовая плотность, l — «путь смещения», u — осредненная по времени скорость, y — поперечная координата.

На основании (1) имеем

$$u = \int \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{l} dy + C. \quad (2)$$

Вид аппроксимирующих функций для τ и l должен определяться действительным распределением скоростей в пограничном слое, т. е. формула (2) должна соответствовать экспериментальным результатам. В предлагаемой работе используется предположение, что если формула (1) правильно отражает действительность, то при более

точной аппроксимации τ и l можно получить более точное распределение скоростей по (2). В практических расчетах широкое распространение получили весьма простые формулы логарифмических законов Прандтля (для постоянного напряжения трения) и Кармана (для линейного распределения напряжения трения), которые следуют из (2), но только для простейших типов течений. Поэтому представляется интересным распространить указанные выше зависимости на более сложные случаи, например, для пограничных слоев с положительным продольным градиентом давления. Такие течения весьма часто встречаются в технике, и им посвящено немало работ, из которых с точки зрения рассматриваемой задачи наиболее интересной является работа К. К. Федяевского [1].

1. Профиль напряжения трения. Мысль о представлении касательного напряжения в виде полинома была высказана еще в 1931 году Бури [2], но ему не удалось до конца выявить характер распределения τ_y по всей толщине пограничного слоя (здесь и в дальнейшем рассматривается слой конечной толщины). В работе [1] безразмерное напряжение τ/τ_0 представляется рядами по степеням $\eta = \frac{y}{\delta}$ (τ_0 — напряжение на стенке, δ — толщина пограничного слоя), и в сочетании с полуэмпирической теорией Прандтля (1) получена серия профилей скоростей для турбулентного пограничного слоя с положительным продольным градиентом давления. Для пути смещения используется интерполяционная формула Прандтля

$$\bar{l} = \frac{l}{\delta} = 0,14 - 0,08(1 - \eta)^2 - 0,06(1 - \eta)^4 \quad (3)$$

Полученные К. К. Федяевским формулы хорошо согласуются с экспериментами Грушвитца [3] для крылового профиля, но из-за громоздкости их использование в то время было затруднительно. При современном развитии вычислительной техники к ним можно обратиться вновь. Кроме того, в настоящее время имеются более подробные экспериментальные данные, чем [3], например, в работе Шубауэра и Клебанова [4], позволяющие более надежно проверять результаты расчета.

Из работы [1] заимствуется выражение для распределения касательного напряжения в виде

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = B_0 + B_1 \eta + B_2 \eta^2 + B_3 \eta^3 + \dots, \quad (4)$$

так как оно позволяет провести вычисление по (2) до конца. Коэффициенты B_i определяются из уравнений движения на границах пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \text{а) } \left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)_{\eta=0} &= 1, & \text{б) } \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)_{\eta=0} &= \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{\delta}{\tau_0} = \frac{\lambda}{2}, \\ \text{в) } \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)_{\eta=0} &= -\frac{1}{4} \lambda^2 \quad \text{г) } \left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)_{\eta=1} &= 0, \end{aligned}$$

$$д) \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)_{\eta=1} = 0. \quad (5)$$

Здесь λ — формпараметр, учитывающий влияние продольного градиента давления p . В [1] указывается также диапазон применимости различных полиномов для напряжения трения (когда τ/τ_0 или $\sqrt{\tau/\tau_0}$ всегда положительно при $0 \leq \eta \leq 1$), в частности, формула (4) при отбрасывании условия (5в) дает аппроксимацию, применимую как в сечении с нулевым градиентом давления, так и на всем протяжении потока, вплоть до точки отрыва, где $\lambda \rightarrow \infty$. Итак,

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta - (3 + \lambda) \eta^2 + \left(2 + \frac{\lambda}{2} \right) \eta^3 \quad (6)$$

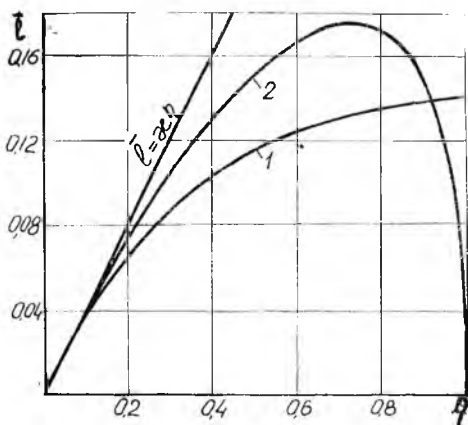


Рис. 1.

Последнее выражение и используется в дальнейшем для получения однопараметрического семейства профилей скоростей.

Оценка точности интерполяции К. К. Федяевского была проведена в [4], и в ряде случаев имело место хорошее совпадение, правда, при этом не указывалось, какой именно полином сравнивался с измеренным напряжением. В [4] измерение турбулентных напряжений производилось термоанемометрическим методом, который хотя и является сам объектом исследования, качественные результаты дает достаточно верные. Окончательная оценка пока может быть проведена только при сравнении расчетных и экспериментальных профилей скоростей, так как измерение последних наиболее надежно.

2. Путь смещения. На рис. 1 показано распределение пути смещения по толщине пограничного слоя в соответствии с различными гипотезами. Карман [5] показал теоретически, что $l(y)$ является довольно сложной функцией и на основании его гипотезы подобию определяется соотношением $\frac{\partial u/\partial y}{\partial^2 u/\partial y^2}$ (кривая 2, рис. 1). Там же кривая 1 соответствует экспериментам Никурадзе [5] для гладких труб и хорошо интерполируется формулой Прандтля (3), которая и была использована в [1]. Однако данные [6] для плоских диффузоров, представленные на рис. 2, а также обработка измерений [4] позволяют заметить влияние положительного градиента давления на распределение пути смещения. Это влияние заключается в том, что увеличение градиента давления ведет к увеличению производ-

ной $\frac{\partial \bar{l}}{\partial \eta}$ вблизи стенки, а также к смещению максимума кривой $\bar{l}(\eta)$ и изменению его величины. Указанные особенности хорошо отражаются следующей простой аппроксимирующей формулой

$$\bar{l} = \chi_1 \eta \cdot e^{-n\eta}, \quad (7)$$

где χ_1 и n — коэффициенты, определяемые из эксперимента. Нетрудно заметить, что линейная гипотеза Прандтля о распределении пути смещения $\bar{l} = \chi \eta$ получается из (7), если ограничиться первым членом разложения $e^{n\eta}$. Формула (7) при $\chi = 0,382$ и $n = 1,0$ хорошо согласуется с опытами [5] (кривая 1 рис. 1) для гладких труб и может быть использована вместо (3). В общем случае χ и n не являются константами, а зависят, по крайней мере, от формпараметра λ .

Эксперименты Никурадзе [5] показывают, что распределение безразмерного пути смещения $e(\eta)$ практически неизменно в широком диапазоне чисел Рейнольдса, поэтому и в нашем случае целесообразно сделать предположение, что χ_1 и n являются функциями только формпараметра λ , вид же их можно установить из обработки измерений в турбулентном пограничном слое. Формулу, аналогичную (7), использовал Ван Драйст [7], руководствуясь соображениями об экспоненциальном характере затухания пульсаций при приближении к стенке.

3. Профиль скоростей. Перепишем выражение (2) в виде

$$u = V_* \int \frac{V_* \bar{\tau}}{\bar{l}} d\eta + C \quad \left(\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0}; V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right). \quad (8)$$

Выполняя интегрирование в (8) с учетом (6) и (7) и определяя постоянную интегрирования из условий на внешней границе пограничного слоя, получим:

$$\bar{u} = \frac{u}{U} = 1 + \frac{1}{z} [\text{Ei}(n\eta) + e^{n\eta}(a\eta^2 - b\eta + c) - d]; \quad (9)$$

$$\left(z = \frac{\chi_1 U}{V_*} = \chi_1 \sqrt{\frac{2}{c_f}} \right) \quad (9a)$$

$$a = \frac{4 + \lambda}{2n}; \quad b = \frac{4 + \lambda + 3n + \lambda n}{n^2};$$

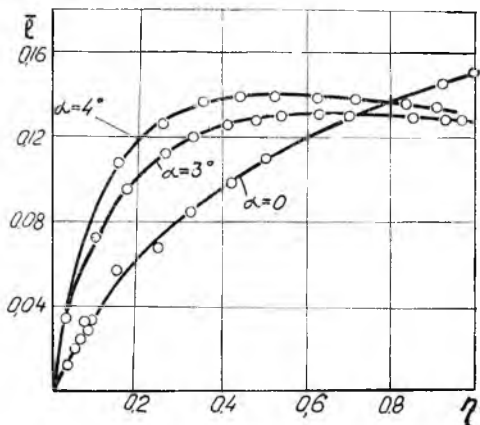


Рис. 2.

где U — скорость на внешней границе слоя при $\eta=1$; c_1 — местный коэффициент трения.

$$c = \frac{6n + 2\lambda n + 8 + 2\lambda + \lambda n^2}{2n^3} = \frac{b}{n} + \frac{\lambda}{2n}; \quad d = \text{Ei}(n) + \frac{e^n (\lambda - n - n^2 + 4)}{n^3}. \quad (96)$$

Полученное выражение справедливо только начиная с некоторого расстояния от стенки, т. к. функция $\text{Ei}(n\eta)$ имеет логарифмическую особенность при $\eta=0$. Поэтому вводим в рассмотрение ламинарный подслой, как это делается в подобных случаях.

4. Закон сопротивления. Для течения в ламинарном подслое воспользуемся формулой Пьютона

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\nu}{V_*^2 \cdot \delta} \cdot \frac{du}{d\eta} \quad (10)$$

и выражением (6), в котором отброшены члены со степенями η выше первой ввиду малости толщины зоны с преобладающим молекулярным трением, а именно:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \lambda \eta \quad \left(0 \leq \eta \leq \frac{\delta_\pi}{\delta}\right). \quad (11)$$

Приравнявая (10) и (11) и выполняя интегрирование, получим

$$\bar{u} = \frac{u}{U} = \frac{\kappa}{z} \left(R_* \cdot \eta + \frac{R_* \cdot \lambda}{2} \eta^2 \right); \quad R_* = \frac{V_* \cdot \delta}{\nu}, \quad (12)$$

где δ_π — толщина ламинарного подслоя.

Приравнявая скорости по (9) и (12) на внешней границе ламинарного подслоя, получим закон сопротивления:

$$z = \kappa_1 \left(\alpha + \frac{\alpha^2 \lambda}{2R_*} \right) - \text{Ei} \left(\frac{\alpha n}{R_*} \right) - e^{\frac{\alpha n}{R_*}} \left(a \frac{\alpha^2}{R_*^2} - b \frac{\alpha}{R_*} + c \right) + d; \quad \left(\alpha = \frac{V_* \cdot \delta_\pi}{\nu} \right) \quad (13)$$

Будем полагать, что α зависит только от формпараметра λ и не зависит от числа Рейнольдса набегающего потока.

5. Определение зависимостей $\kappa_1(\lambda)$, $n(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ проводилось по экспериментам Шубауэра и Клебанова [4], которые выполнены достаточно подробно и содержат все необходимые для расчета величины.

Непосредственное вычисление функции $\bar{l}(\eta)$ по (1) и результатам измерений связано с графическим дифференцированием экспериментальных кривых, что приводит к неизбежным погрешностям. Кроме того, сами опытные данные содержат ошибки. Поэтому целесообразно подбирать $\kappa_1(\lambda)$ и $n(\lambda)$ по лучшему совпадению расчетных и опытных профилей скоростей, так как измерение последних всегда более надежно, чем измерение касательных напряжений.

Определение функций $\kappa_1(\lambda)$ и $p(\lambda)$ производилось следующим образом. Сначала на ЭЦВМ «Урал-2» была вычислена функция

$$\kappa_1 \frac{u-U}{V_*} = \text{Ei}(n\eta) + e^{n\eta}(a\eta^2 - bn + c) + d, \quad (14)$$

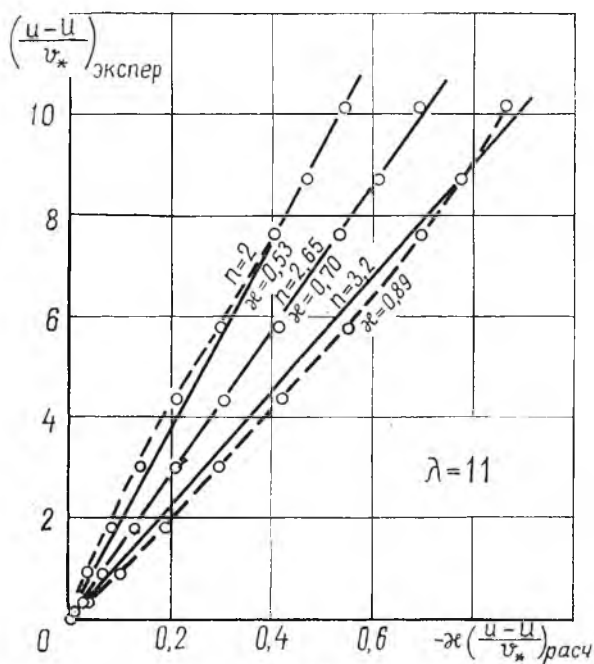


Рис. 3.

при $n=1,6 \div 3,6$ (0,05) и $\eta=0,1 \div 1,0$ (0,1) для сечений пограничного слоя при соответствующих значениях формпараметра λ по экспериментам [4]. Для уточнения характера искомых функций в диапазоне $\lambda=0 \div 11$ проводилась интерполяция профилей скоростей, а при $\lambda > 50$ — их сглаживание. Экспериментальные профили были построены в координатах $[u, x]$ при постоянных значениях η через $\Delta\eta=0,1$, в результате чего было обнаружено, что кривые $u(\eta, x)$ при больших значениях λ (при приближении к точке отрыва) имеют волнистый характер. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что точка отрыва не оставалась на одном месте (эксперимент продолжался не один день, и, как указывают сами авторы [4], поддерживалось постоянным только число $\text{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$ набегающего потока) и соответствующим образом влияла на профили скоростей предыдущих сечений. Поэтому и было необходимо провести некоторое сглаживание кривых, после чего производилось сравнение расчетных и экспериментальных профилей. Для этого последние строи-

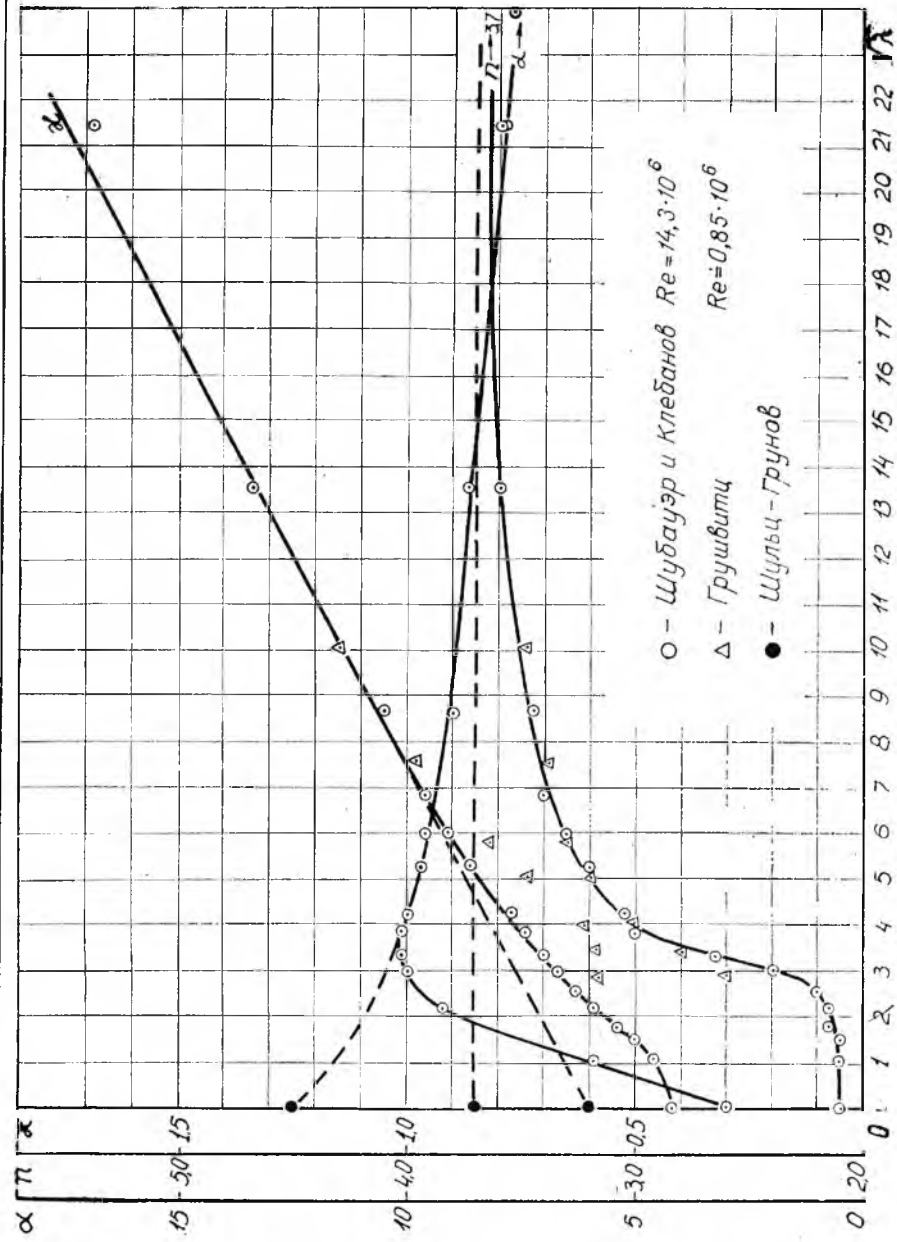


Рис. 5.

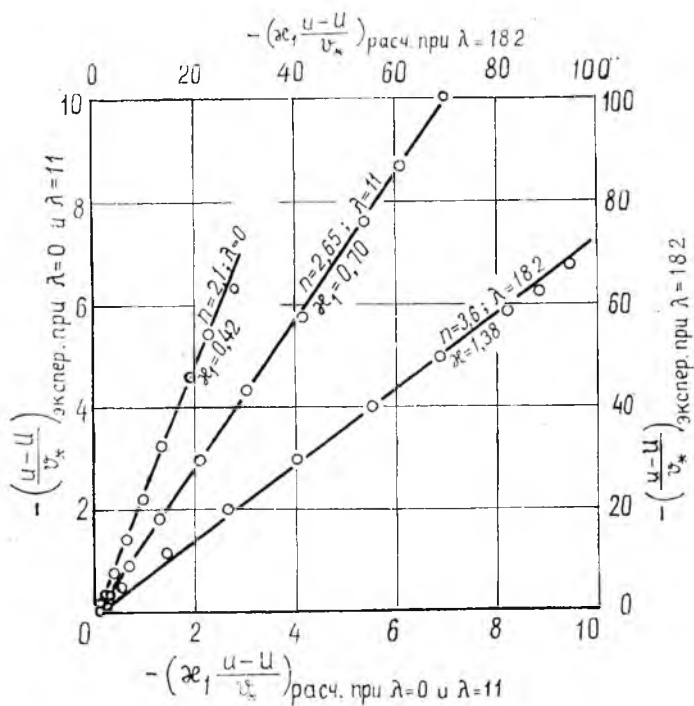


Рис. 4.

лись в координатах $\left[\left(\frac{u-U}{v_*} \right)_{\text{экспер}}; \left(x_1 \frac{u-U}{v_*} \right)_{\text{расч}} \right]$. В идеальном случае такие графики представляли бы прямую линию с угловым коэффициентом x_1 , проходящую через начало координат. Именно это и принималось во внимание при подборе n , т. е. из всех значений n выбиралось то, при котором график был ближе всего к прямой линии. По углу наклона аппроксимирующей прямой находилось значение x_1 . На рис. 3 показан пример подбора при $\lambda=11$, где наилучший результат получен при $n=2,65$. На рис. 4 видно, что величина x_1 сильно зависит от формпараметра. Функция $\alpha(\lambda)$ определяется при уже найденных значениях $x_1(\lambda)$ и $n(\lambda)$ для ряда сечений путем графического решения системы уравнений (9) и (12). Окончательные результаты обработки представлены на рис. 5 (сплошные линии).

6. Отрыв пограничного слоя. Перепишем (9) в виде

$$\bar{u} = 1 + \frac{V_* \cdot \lambda}{x_1 U} \left[\frac{Ei(n\eta)}{\lambda} + e^{n\eta} \left(\frac{a}{\lambda} \eta^2 - \frac{b}{\lambda} \eta + \frac{c}{\lambda} \right) - \frac{d}{\lambda} \right]. \quad (15)$$

Функция $x_1(\lambda)$ для $\lambda > 50$ (см. рис. 5) может быть аппроксимирована формулой

$$x_1(\lambda) = 0,6 + 0,053 \sqrt{\lambda}. \quad (16)$$

В этом случае неопределенность перед квадратной скобкой в (15) для точки отрыва, когда $\lambda \rightarrow \infty$, может быть раскрыта так:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{V_* \cdot \lambda}{U(0,6 + 0,053 \sqrt{\lambda})} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{V_* \sqrt{\lambda}}{U\left(\frac{0,6}{\sqrt{\lambda}} + 0,053\right)} = \frac{\sqrt{\frac{dp}{dx} \cdot \delta}}{0,053 \sqrt{\rho U^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-\frac{U'}{U} \delta}}{0,053} = f \quad \left(U' = \frac{dU}{dx}\right). \quad (17)$$

Кроме того, величина n при больших значениях λ стремится, по-видимому, к некоторому пределу $n \cong 3,6 \div 3,7$ (см. рис. 5). Учитывая это, а также (17) и (9б), уравнению (15) при $\lambda \rightarrow \infty$ придадим вид

$$\bar{u} = 1 + f [e^{3,7\eta} (0,1352\eta^2 - 0,3435\eta + 0,2279) - 0,7980]. \quad (18)$$

Определение f по (17) достаточно громоздко, поэтому поступим следующим образом. Так как в точке отрыва $\delta_{\text{л}}$ можно считать равной 0, а выражение (18) удовлетворяет условиям на внешней границе при любых f , то его значение можно определить только из условий на стенке, продолжив до нее профиль (18). При $\lambda \rightarrow \infty$ для $\eta = 0$ получим

$$f = 1,755 \quad (19)$$

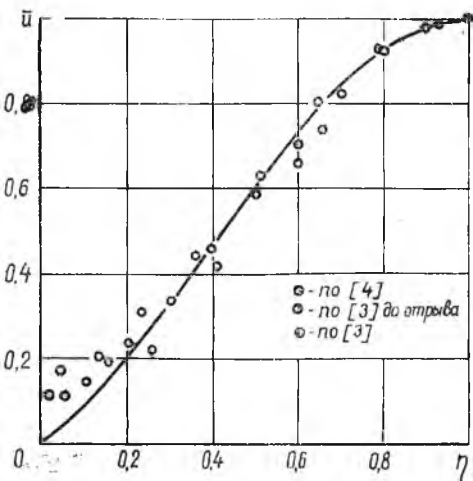


Рис. 6.

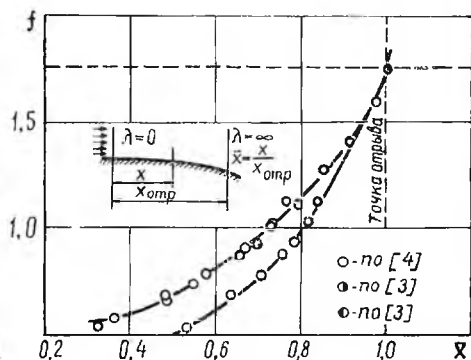


Рис. 7.

На рис. 6 этот профиль показан совместно с экспериментальными по [4] и [3] для зоны отрыва пограничного слоя. Как следует из (18), производная $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \neq 0$, тем не менее она весьма мала, что делает данный профиль чрезвычайно близким к отрывному. По экс-

экспериментам [4] производная $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$ получилась даже больше, чем по (18). Этот факт можно объяснить трудностью измерений в зоне отрыва из-за сильного возрастания пульсаций и непостоянства положения точки отрыва пограничного слоя.

Если считать, что при $\lambda > 50$ х. (λ) не зависит от числа Re набегающего потока (при этих значениях λ кривые х. (λ) на рис. 5 сливаются, несмотря на большую разницу в числах Рейнольдса для [3] и [4]), то параметр f можно считать универсальным критерием отрыва. На рис. 7 показано изменение этого параметра на диффузорном участке течения по [3] и [4] как функции безразмерного расстояния $\bar{x} = \frac{x}{x_{отр}}$, где $x_{отр}$ — участок пограничного слоя от сечения, соответствующего $\lambda=0$, до точки отрыва. Но у Грушвитца в сечении с нулевым градиентом давления пограничный слой не был полностью турбулентным, и если за начало отсчета в [3] принять точку перехода, то результаты обоих экспериментов ложатся на одну кривую. Это подтверждает предположение о независимости параметра f от числа Re при полностью развитом турбулентном пограничном слое. На этом же основании величина комплекса

$$\sqrt{\frac{dp}{dx} \cdot \frac{\delta}{\rho U^2}} = 0,093 \quad (20)$$

также может считаться условием отрыва. Из (20) следует, что отрыв наступает при вполне определенном отношении продольного градиента статического давления к скоростному напору внешнего течения, отнесенному к единице толщины пограничного слоя, причем в этой точке $\frac{dp}{dx} > 0$.

В ы в о д ы

1. Формулы (9), (13), (18) и (20) с использованием зависимостей на рис. 5 могут послужить основой для построения расчетного метода определения характеристик пограничного слоя с продольным положительным градиентом давления и отрывом или использоваться в таких методах, как [8]. Полученные функции (рис. 5), по-видимому, не зависят от числа Re набегающего потока, а имеющиеся расхождения можно объяснить частично тем, что определение параметра $\lambda = \frac{dp \delta}{dx \tau_0}$ по обработке экспериментальных данных связано с неизбежными погрешностями.

2. Для уточнения величин $\chi_1(\lambda)$, $n(\lambda)$ и $a(\lambda)$ при $\lambda=0$ были обработаны эксперименты [9] и [10], где условие $\lambda=0$ соблюдалось по всей длине пластины. Вычисление дало отличные от [3] и [4] результаты, но необходимо учесть, что в последних экспериментах

сечению с нулевым градиентом предшествовал участок разгона, обеспечивший несколько большую полноту профилю скоростей при $\lambda=0$, чем в [9] и [10]. Таким образом, формпараметр λ не полностью отражает развитие сечения. На рис. 5 пунктиром показан предполагаемый вид функций $\chi_1(\lambda)$ $\mu(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ для случая, когда перед диффузорным участком течения нет разгона потока. Возмож-

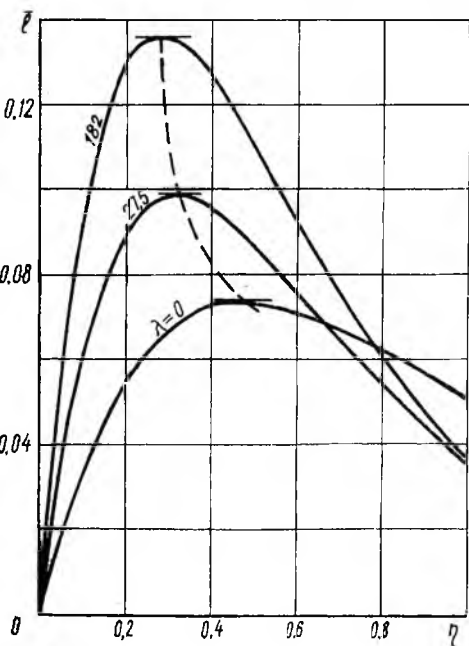


Рис. 8.

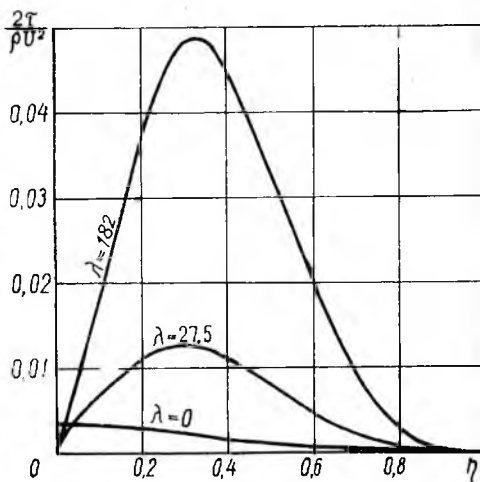


Рис. 9.

но, что расхождение между результатами обработки [3] и [4] в основном зависит от различий в развитии течения до сечения, где $\lambda=0$.

3. Распределение $l(\eta)$ не остается одинаковым вдоль потока, как это имеет место при отсутствии продольного градиента давления (пластина) или в случае гладких труб. Из формулы (1) следует, что $l(\eta)$ представляет собой масштаб турбулентных напряжений, и его увеличение свидетельствует об увеличении затрат энергии главного движения на возбуждение турбулентных пульсаций, на вихреобразование. В нашем случае следствием этого является формирование перегиба на профиле скорости по мере приближения к точке отрыва. Это удобнее всего проследить на графиках рис. 8, 9 и 10, где построены расчетные зависимости $l(\eta, \lambda)$, $\frac{2 \cdot \tau(\eta, \lambda)}{\rho U^2}$ и $u(\eta, \lambda)$ для разных значений формпараметра λ . Экспериментальные зависимости по [4] для $\frac{2 \cdot \tau(\eta, \lambda)}{\rho U^2}$ отличаются по величине от расчетных (рис. 9), но по характеру распределения довольно близки. Пред-

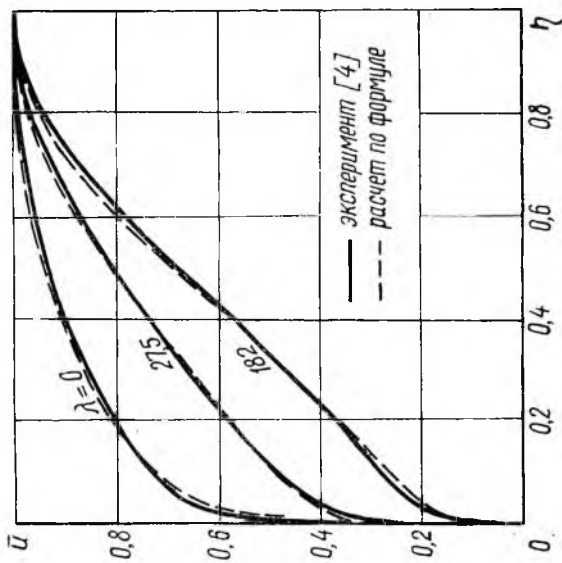


Рис. 10.

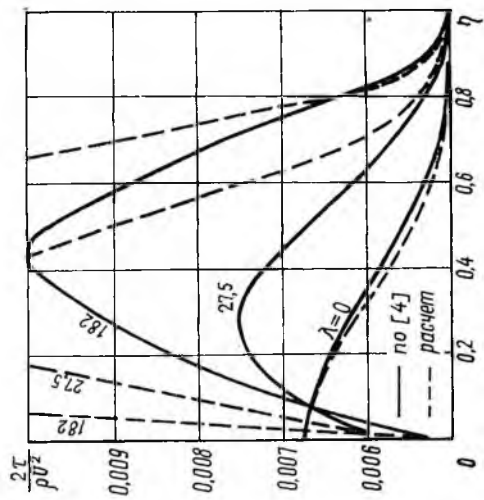


Рис. 11.

ставляется вероятным, что измеренные в [4] турбулентные напряжения несколько занижены (рис. 11). Хотя оценить точность формулы (6) по непосредственным измерениям и не удастся, однако хорошее совпадение расчетных и экспериментальных профилей скоростей позволяет заключить, что (6) в сочетании с (7) достаточно правильно отражают действительность. Неточность же аппроксимации (6) корректируется соответствующим подбором $\kappa_1(\lambda)$ и $n(\lambda)$ в формуле (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. К. Федяевский. Турбулентный пограничный слой крыла. Труды ЦАГИ, № 282, 1936 и № 316, 1937.

2. A. Buri. Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Promotionarbeit. Buchdruckerei A. G. Jean Frey. Zürich, 1931.

3. Gruschwitz, Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Göttingen Dissertation. Ingenieur-Archiv. II Band. 3 Heft. 1931.

4. G. B. Schubauer, P. S. Klebanoff. Investigation of Separation of the Turbulent Boundary Layer. NACA Rep. № 1030, 1951.

5. Проблемы турбулентности. Сборник переводных статей под ред. М. А. Великанова и Н. Т. Швейковского, ОИТИ НКТП СССР, М.-Л., 1936.

6. J. Nikuradse Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forschungen aus dem Kaiser-Wilhelm Institut für Strömungsforschung, № 289, Berlin. 1929.

7. E. R. Van Driest, On Turbulent Flow near the Wall. IASc. Vol. 23, 1956, № 1.

8. К. К. Федяевский и А. С. Гниевский. Метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давлений. Журнал технической физики, Т-XXVII вып. 2 М.-Л. 1957

9. F. Schultz-Grunow. Neues Reibungswiderstandsgezetz für glatte Platten. Luffahrtforschung, 17, № 8, 1940, s. 239—246.

10. P. S. Klebanoff, Charackteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, NACA Rep. № 1247, 1955.
