КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

О. Ф. МЕНЬШИХ

К ТЕОРИИ КАСАТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

В работе рассмотрено приложение касательных преобразований С. Ли [1—4] к нахождению частных решений системы уравнений газовой динамики типа бегущих волн [5] в случае пространственного нестационарного потенциального изэнтропического движения газа. Бегущие волны системы уравнений газовой динамики выводились многими авторами разными методами [6—14]. Ниже получена упрощенная система уравнений, определяющая касательные преобразования. Эта система позволила единым методом вывести тройные, двойные и простые волны при принятых выше допущениях. Предельным переходом получены системы тройных и двойных волн для акустического приближения и для случая несжимаемой жидкости. Получено общее решение системы простых волн. Впервые подобное общее решение найдено в [6] другим методом. Доказано, что выведенные системы бегущих волн являются единственными при принятом выборе независимых переменных.

1. За последнее время, наряду с интенсивным развитием численных методов, в газовой динамике усилился интерес к нахождению частных решений и построению с их помощью различных прямых и обратных краевых задач. Этому способствовало создание общей теории инвариантно-групповых решений дифференциальных уравнений Л. В. Овсянниковым [15] и развитие метода дифференциальных связей Н. Н. Яненко [16]. В настоящей работе делается попытка применения теории касательных преобразований С. Ли [1—4] к нахождению частных решений системы уравнений газовой динамики типа бегущих волн [5] в случае потенциального изэнтропического движения газа. Подобные частные решения рассматривались в работах А. А. Никольского [7, 9, 10], С. В. Валландера [3], О. С. Рыжова [11], Н. Н. Яненко, Ю. Я. Погодина, В. А. Сучкова,

А. Ф. Сидорова [5, 6, 12—13] и других авторов. При этом применялись различные методы. Как известно, касательное преобразование Л. Ли записывается в виде [1—4]

$$d\Phi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} d\xi_i = \mu \left[dV - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i \right] \tag{1.1}$$

для независимых значений дифференциалов dx_i, dp_i, du [3]. Будем предполагать, что $V = V(x_k)$ — функция, удовлетворяющая некоторому дифференциальному уравнению второго порядка, $\Phi = \Phi(\xi_k)$ — новая функция, причем имеет место зависимость:

$$\xi_i = \xi_i(V, x_k, p_k); \quad \Phi = \Phi(V, x_k, p_k); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_i} = \Gamma_i(V, x_k, p_k); \tag{1.2}$$

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial x_k}.$$

$\mu = \mu(V, x_k, p_k)$ — произвольная функция (i, $k = 1, \ldots, n$).

Известна полная система уравнений, определяющая общее касательное преобразование С. Ли [1—4]:

$$(\xi_i, \xi_j) = (\Gamma_i, \Gamma_j) = (\Phi, \xi_i) = 0; \quad (\Phi, \Gamma_i) = -\mu\Gamma_i \ (i, \ j = 1, \ldots, n);$$

$$(\xi_i, \Gamma_j) = 0; \ (i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j); \ (\xi_i, \Gamma_i) = -\mu (i = 1, \ldots, n); \tag{1.3}$$

где символ ( ) означает скобки Пуассона [1, 17, 18]

$$(\psi, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\psi}{dx_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{d\varphi}{dx_i} \right); \quad \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial V}.$$

Система (1.3) является переопределенной нелинейной системой уравнений в частных производных первого порядка.

Известны в анализе частные случаи касательных преобразований: преобразование Лежандра и преобразование Ампера [1, 3], в аналитической механике широко используются канонические преобразования [17, 18].

2. Система (1.3) совместна и если задать ε_i и Φ как функции x_k, p_k, $V (i, k = 1, \ldots, n)$, то можно однозначно определить Γ_i [1, 3]. Однако практически это сделать сложно, притом неизвестен способ одновременного задания функций ε_i и V.

Рассмотрим частный случай — $\mu = \text{const}$; $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_k, p_k)$; $p_i = p_i(x_k, p_k)$, тогда основное уравнение (1.1) можно переписать в виде:

$$d\Phi - \mu \, dV = \sum_{i=1}^{n} (\Gamma_i \, d\varepsilon_i - \mu p_i \, dx_i). \tag{2.1}$$

Поскольку в левой части стоит полный дифференциал, то обозначим правую часть dT. Учитывая (1.2), получим:

$$dT = \sum_{i=1}^{n} (\psi_i \, dx_i + W_i \, dp_i), \tag{2.2}$$

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} - \mu p_i; \qquad (2.3)$$

$$W_i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

Составляя условия интегрируемости (2.2), получим $h(2h-1)$ уравнений, связывающих ε_i и Γ_k $(ik=1, \ldots, n)$, которые можно записать в следующем окончательном виде:

$$\begin{gathered}[x_i,\ p_k] = \mu\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1, \ldots,\ n); \\ [p_i,\ p_k] = 0; \quad [x_i,\ x_k] = 0\ (i,\ k = 1, \ldots,\ n;\ i \neq k),\end{gathered} \qquad (2.4)$$

где символ [ ] — скобки Лагранжа [17, 18]

$$[\psi, \varphi] = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \psi} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \psi} \right); \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Формально (2.8) совпадает с известной системой уравнений, определяющей канонические преобразования в терминах скобок Лагранжа [17, 18], причем валентность С совпадает с μ [18]. Система (2.8) значительно проще, чем система (1.3); если функции ε_i будут известны, то относительно Γ_k получим переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, исследование на совместимость которой не вызывает особых трудностей [16]. Приведем здесь только один пример использования системы (2.8), важный для дальнейшего изложения. Рассмотрим случай $h=4$. Пусть заданы функции ε_i следующим образом:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = x_1; \quad \varepsilon_2 = p_2; \quad \varepsilon_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 x_3; \\ \varepsilon_4 = \beta_1 p_4 + \beta_2 x_4; \quad \mu = -1,\end{gathered} \qquad (2.9)$$

где α_i, β_i — произвольные параметры $(i=1,2)$. Заметим, что произвольно задавать функции ε_i нельзя, т. к. должна удовлетворяться первая группа уравнений (1.3)

$$(\varepsilon_i,\ \varepsilon_j) = 0 \qquad (2.10)$$
$$(i, j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

В данном случае (2.10) тождественно удовлетворяется. Подставив (2.9) в систему (2.8), придем согласно (2.7) к переопределенной системе 36 уравнений относительно четырех функций Γ_i $(i=1, 2, 3, 4)$. Эта переопределенная система имеет следующее простейшее решение:

$$\Gamma_1 = p_1;\ \Gamma_2 = -x_2;\ \Gamma_3 = -(\alpha_1^0 x_3 + \alpha_2^0 p_3);\ \Gamma_4 = -(\beta_1^0 x_4 + \beta_2^0 p_4), \qquad (2.11)$$

где α_i^0, β_i^0 — параметры, которые связаны с α_i, β_i $(i, j = 1.2)$ двумя условиями:

$$1 + \alpha_2 \alpha_2^0 = \alpha_1 \alpha_1^0; \quad 1 + \beta_2 \beta_2^0 = \beta_1 \beta_1^0. \tag{2.12}$$

Используя (2.3), (2.4), (2.9), (2.12), можно в явном виде записать все формулы, определяющие при $\mu = -1$ искомое касательное преобразование:

$$\Phi = -V + x_2 p_2 + x_3 p_3 (1 + \alpha_2 \alpha_2^0) + x_4 p_4 (1 + \beta_2 \beta_2^0) +$$

$$+ \frac{\alpha_1^0 \alpha_2}{2} x_3^2 + \frac{\beta_1^0 \beta_2}{2} x_4^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2^0}{2} p_3^2 + \frac{\beta_1 \beta_2^0}{2} p_4^2; \tag{2.13}$$

$$\xi_1 = x_1; \quad \xi_2 = p_2; \quad \xi_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 x_3; \quad \xi_4 = \beta_1 p_4 + \beta_2 x_4; \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = -p_1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} = x_2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} = \alpha_1^0 x_3 + \alpha_2^0 p_3; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_4} = \beta_1^0 x_4 + \beta_2^0 p_4; \tag{2.15}$$

$$1 + \alpha_2 \alpha_2^0 = \alpha_1 \alpha_1^0; \quad 1 + \beta_2 \beta_2^0 = \beta_1 \beta_1^0. \tag{2.16}$$

Таким образом, данное касательное преобразование содержит 6 независимых параметров.

3. Система уравнений, описывающая пространственное нестационарное потенциальное изэнтропическое движение газа, как хорошо известно [19], может быть сведена к одному уравнению относительно потенциала скоростей:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - c^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - c^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - c_2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} +$$

$$+ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial z} +$$

$$+ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial t} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial t} = 0, \tag{3.1}$$

где φ — потенциал скоростей; t — время; u, v, w — компоненты вектора скорости $\vec{V}$ в декартовой системе координат x, y, z; $c = c\,(H)$ — скорость звука; $H = \int \frac{dp}{\rho}$ — энтальпия. Давление p и плотность ρ связаны уравнением

$$p = f(\rho); \quad \frac{dp}{d\rho} > 0. \tag{3.2}$$

Энтальпия определяется из интеграла Лагранжа-Коши [19]

$$H = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right]. \tag{3.3}$$

Составим следующую матрицу:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial t\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Следуя работе [5], назовем частные решения уравнения (3.1) бегущими волнами ранга $r = 1, 2, 3$, если общий ранг матрицы M на данном решении равен r. Из данного определения следует, что между величинами $\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ должно существовать $4-r$ функциональных зависимостей.

Для вывода бегущих волн используем касательное преобразование (2.13) — (2.16), в этих формулах следует принять:

$$x_1 = t; \quad x_2 = x; \quad x_3 = y; \quad x_4 = z; \quad p_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}; \quad p_2 = u; \quad p_3 = v; \tag{3.5}$$

$$p_4 = w; \quad V = \varphi.$$

Уравнение (3.1) преобразуем к новым переменным:

$$\xi_1 = t; \quad \xi_2 = u; \quad \xi_3 = \alpha_1 v + \alpha_2 y; \quad \xi_4 = \beta_1 w + \beta_2 z. \tag{3.6}$$

Для этого необходимо сделать предположение:

$$\Delta_1 = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1)}{\partial(t, x, y, z)} \neq 0; \quad \Delta_2 = \frac{1}{\Delta_1} = \frac{\partial(t, x, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1)} \neq 0. \tag{3.7}$$

Тогда после преобразований найдем:

$$\frac{\partial(p_1, x, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} + (u^2 - c^2)\frac{\partial(t, u, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} + (v^2 - c^2)\frac{\partial(t, x, v, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} +$$
$$+ (w^2 - c^2)\frac{\partial(t, x, y, w)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} + 2u\frac{\partial(t, p_1, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} + 2v\frac{\partial(t, x, p_1, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} +$$
$$+ 2w\frac{\partial(t, x, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} + 2uv\frac{\partial(t, x, u, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} +$$
$$+2uw\frac{\partial(t, x, y, u)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} + 2vw\frac{\partial(t, x, y, w)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} = 0. \tag{3.8}$$

Для вывода уравнения относительно $\Phi = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ следует раскрыть якобианы в (3.8) и подставить в них t, x, y, z, u, v, w, p_1, выраженные через ξ_i и $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Другими словами, необходимо потребовать, чтобы

$$\Delta_3 = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)}{\partial(t, x, y, z, p_1, u, v, w)} \neq 0. \tag{3.9}$$

Легко проверить, что в данном случае условие (3.9) выполняется, и (2.14), (2.15) с учетом (3.5) можно записать в виде:

$$t = \xi_1; \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}; \quad y = \alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} - \alpha_2^0 \xi_3;$$
$$z = \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_4} - \beta_2^0 \xi_4; \quad p_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}; \quad u = \xi_2; \tag{3.10}$$
$$v = \alpha_1^0 \xi_3 - \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3}; \quad w = \beta_1^0 \xi_4 - \beta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_4}.$$

4. Рассмотрим вывод системы бегущих волн ранга $r=3$ — тройные волны. Будем предполагать следующую функциональную зависимость:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(u, v, w). \tag{4.1}$$

Переменные u, v, w независимы. В соответствии с (3.6) в качестве независимых переменных функции Φ:

$$\xi_1 = t; \quad \xi_2 = u; \quad \xi_3 = v; \quad \xi_4 = w. \tag{4.2}$$

Для этого нужно принять в (2.13) и (3.10) следующие значения параметров:

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = 0; \quad \beta_1 = 1; \quad \beta_2 = 0.$$

Из (2.16) следует, что $\alpha_1^0 = 1$; $\beta_1^0 = 1$. Два свободных параметра α_2^0, β_2^0 положим равными нулю. Тогда придем к следующему касательному преобразованию:

$$\Phi = -\varphi + xu + yv + zw; \quad \Phi = \Phi(t, u, v, w) \tag{4.3}$$

$$p_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}; \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}; \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3}; \quad z = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_4}. \tag{4.4}$$

Детерминант матрицы (3.4) с использованием (4.4) можно привести к виду:

$$\det M = \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} \frac{\partial p_1}{\partial \xi_1}. \tag{4.5}$$

Из уравнений (3.7) найдем:

$$\Delta_1 = \frac{\partial (t, u, v, w)}{\partial (t, x, y, z)} = \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} \neq 0; \quad \Delta_2 = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \neq 0, \tag{4.6}$$

откуда вытекает необходимое условие существования тройных волн

$$\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} = 0. \tag{4.7}$$

С другой стороны из (4.1) и (4.4) следует

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = -p_1(\xi_2, \xi_3, \xi_4). \tag{4.8}$$

Отсюда видно, что единственным представлением Φ, которое приводит к тройным волнам при принятом выборе независимых переменных, будет следующее:

$$\Phi = \Phi^0(\xi_2, \xi_3, \xi_4) + \Phi^1(\xi_2, \xi_3, \xi_4)\cdot \xi_1. \qquad (4.9)$$

Для записи системы тройных волн подставим (4.2), (4.4), (4.9) в (3.8), после чего последнее приводится к виду

$$L_0 = L_1 \xi_1 + L_2 \xi_1^2 = 0. \qquad (4.10)$$

В силу независимости ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 приходим к системе тройных волн:

$$L_0 = B_1 \left[\Phi^0_{22}\cdot\Phi^0_{33} - \left(\Phi^0_{23}\right)^2\right] + B_2 \left[\Phi^0_{22}\cdot\Phi^0_{44} - \left(\Phi^0_{24}\right)^2\right] +$$
$$+ B_3 \left[\Phi^0_{33}\cdot\Phi^0_{44} - \left(\Phi^0_{34}\right)^2\right] + B_4 \left[\Phi^0_{22}\times\Phi^0_{34} - \Phi^0_{23}\times\Phi^0_{24}\right] +$$
$$+ B_5 \left[\Phi^0_{33}\times\Phi^0_{24} - \Phi^0_{23}\times\Phi^0_{34}\right] + B_6 \left[\Phi^0_{44}\times\Phi^0_{23} - \Phi^0_{24}\times\Phi^0_{34}\right] = 0; \qquad (4.11)$$

$$L_1 = \Phi^0_{22}\left[B_1\times\Phi^1_{33} + B_2\times\Phi^1_{44} + B_3\times\Phi^1_{34}\right] + \Phi^0_{33}\left[B_1\times\Phi^1_{22} + B_3\times\Phi^1_{44} +\right.$$
$$\left. B_5\times\Phi^1_{24}\right] + \Phi^0_{44}\left[B_2\times\Phi^1_{22} + B_3\times\Phi^1_{33} + B_6\times\Phi^1_{23}\right] + \Phi^0_{23}\left[\Phi_6\times\Phi^1_{44} - 2B_1\times\right.$$
$$\left.\times\Phi^1_{23} - B_4\times\Phi^1_{24} - B_5\times\Phi^1_{33}\right] + \Phi^0_{24}\left[B_5\times\Phi^1_{33} - 2B_2\times\Phi^1_{24} - B_4\times\right.$$
$$\left.\times\Phi^1_{23} - B_6\times\Phi^1_{34}\right] + \Phi^0_{34}\left[B_4\times\Phi^1_{22} - 2B_3\times\Phi^1_{23} - B_5\times\right.$$
$$\left.\times\Phi^1_{34} - B_6 + \Phi^1_{24}\right] = 0; \qquad (4.12)$$

$$L_2 = B_1\left[\Phi^1_{22} + \Phi^1_{33} - \left(\Phi^1_{23}\right)^2\right] + B_2\left[\Phi^1_{22}\cdot\Phi^1_{44} - \left(\Phi^1_{24}\right)^2\right] +$$
$$+ B_3\left[\Phi^1_{33}\cdot\Phi^1_{44} - \left(\Phi^1_{34}\right)^2\right] + B_4\left[\Phi^1_{22}\cdot\Phi^1_{33} - \Phi^1_{23}\cdot\Phi^1_{24}\right] +$$
$$+ B_5\left[\Phi^1_{33}\cdot\Phi^1_{24} - \Phi^1_{23}\cdot\Phi^1_{34}\right] + B_6\left[\Phi^1_{44}\cdot\Phi^1_{23} - \Phi^1_{24}\cdot\Phi^1_{34}\right] = 0; \qquad (4.13)$$

$$B_1 = \left(\Phi^1_4 - w\right)^2 - c^2; \quad B_2 = \left(\Phi^1_3 - v\right)^2 - c^2; \quad B_3 = \left(\Phi^1_2 - u\right)^2 - c^2;$$
$$B_4 = 2\left(\Phi^1_4 - w\right)\left(v - \Phi^1_3\right); \quad B_5 = 2\left(\Phi^1_3 - w\right)\left(u - \Phi^1_2\right);$$

$$B_6 = 2\left(\Phi^1_3 - v\right)\left(u - \Phi^1_2\right); \qquad (4.14)$$

$$\Phi^k_{ij} = \frac{\partial^2\Phi^k}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}; \quad \Phi^k_i = \frac{\partial\Phi^k}{\partial\xi_i}; \quad c^2 = c^2(H); \ (k = 0, 1, \ i, j = 2, 3, 4).$$

Учитывая (4.9), получим формулы перехода к физическим переменным:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Phi^1(u, v, w); \quad x_2 = \Phi^0_2 + \Phi^1_2 t; \quad y = \Phi^0_3 + \Phi^1_3 t; \quad z = \Phi^0_4 + \Phi^1_4 t. \qquad (4.15)$$

Из (3.3) и (4.15) нетрудно найти

$$H = \Phi^1 - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}. \qquad (4.16)$$

Из приведенного вывода следует, что других тройных волн вида (4.1), кроме полученных, не существует. Впервые система тройных волн другим путем была выведена А. Ф. Сидоровым [14].

Из полученной системы выведем систему тройных волн в акустическом приближении. Для этого достаточно в (4.14) положить:

$$u \ll 1; \quad v \ll 1; \quad w \ll 1; \quad c = c_0 = \text{const}.$$

Приведем здесь лишь новые значения коэффициентов Bi ($i=1, 2, \ldots, 6$), поскольку вид уравнений (4.11—4.13), (4.15) не изменится:

$$B_1 = c_0^2 - (\Phi_4^1)^2; \quad B_2 = c_0^2 - (\Phi_3^1); \quad B_3 = c_0^2 - (\Phi_2^1)^2;$$
$$B_4 = -2\Phi_3^1\Phi_4^1; \quad B_5 = -2\Phi_3^1\Phi_4^1; \quad B_6 = -2\Phi_2^1\Phi_3^1. \tag{4.17}$$

Для простоты ограничимся случаем политронного процесса:

$$p = \bar{a}^2\rho^j \quad (j > 1); \quad d = \text{const}. \tag{4.18}$$

Положим в соответствии с акустическим приближением

$$p = p_0(1 + \omega); \quad \rho = \rho_0(1 + \sigma); \quad \omega \ll 1; \quad \rho \ll 1. \tag{4.19}$$

Из (4.18) получим известное приближенное соотношение:

$$\omega = j\sigma. \tag{4.20}$$

Из (4.16) найдем связь Φ^1 и σ

$$\Phi_1 = \left[c_0^2(j-1)\right](1 + j\sigma)/\sigma. \tag{4.21}$$

В правильности произведенных упрощений можно убедиться и непосредственно, производя вывод системы тройных волн для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \tag{4.22}$$

с помощью касательного преобразования (4.3 — 4.4). Рассмотрим упрощение системы тройных волн в другом предельном случае, случае пространственного нестационарного потенциального движения несжимаемой жидкости.

Интеграл Лагранже—Коши возьмем в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0. \tag{4.23}$$

Полагая в (4.11) — (4.14) $c \to \infty$, найдем новые значения коэффициентов B_i в этом случае:

$$B_1 = B_2 = B_3 = -1; \quad B_4 = B_5 = B_6 = 0. \tag{4.24}$$

Формула (4.16) с учетом (4.23) примет вид

$$\Phi_1 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho}. \tag{4.25}$$

Во всех рассмотренных случаях система тройных волн будет переопределенной системой, но противоречий быть не может, т. к. всегда можно положить $\Phi^1=0$, что соответствует стационарному движению, или $\Phi^0=0$, что соответствует автомодельному движению [14]

5. Рассмотрим теперь бегущие волны ранга $r=2$ — двойные волны. Будем искать их в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(u, v); \quad w=w(u, v), \tag{5.1}$$

где u, v должны быть функционально независимы. Можно показать, что для этого достаточно в (2.13) и (3.10) с учетом (3.5) положить:

$$\alpha_1=0; \quad \alpha_2=0; \quad \beta_1=1; \quad \beta_2=1; \quad \alpha_1^0=1; \quad \alpha_2^0=0;$$
$$\beta_1^0=0; \quad \beta_2^0=-1, \tag{5.2}$$

тогда придем к касательному преобразованию вида:

$$\Phi=-\varphi+xu+yv; \quad \Phi=\Phi(t, u, v, z); \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-p_1; \quad x=\frac{\partial\Phi}{\partial u}; \quad y=\frac{\partial\Phi}{\partial v}; \quad w=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{5.4}$$

Из уравнений (3.7) следует

$$\frac{\partial(t, x, y, z)}{\partial(t, u, v, z)}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\neq 0; \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\neq 0. \tag{5.5}$$

Детерминант матрицы (3.4) с учетом (5.4) можно привести к виду:

$$\det M=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial z}\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial z} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

Можно показать, что все миноры 3-го порядка $\det M$ содержат в качестве множителей члены

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial z}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \tag{5.7}$$

Например минор, стоящий в левом верхнем углу $\det M$, запишется в виде

$$\Delta_4=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\left(-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right).$$

Сопоставляя (5.1) и (5.4), получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\Phi_1(u, v); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=-w(u, v). \tag{5.8}$$

Нетрудно убедиться в том, что единственное представление Φ, удовлетворяющее (5.8) и обращающее в нуль выражения (5.7), будет следующее:

$$\Phi=\Phi_0(u, v)+\Phi_1(u, v)t+\Phi_2(u, v)\cdot z. \tag{5.9}$$

Подставляя (5.4), (5.9) в (3.8), получим уравнение вида

$$L_3+L_4t+L_5z=0, \tag{5.10}$$

откуда, в силу независимости t, u, v, z, получим систему двойных волн:

$$L_3 = R_1\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial u^2} + 2R_2\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial u\,\partial v} + R_3\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial v^2} = 0;$$

$$L_4 = R_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial u^2} + 2R_2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial u\,\partial v} + R_3\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial v^2} = 0; \tag{5.11}$$

$$L_5 = R_1\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial u^2} + 2R_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial u\,\partial v} + R_3\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial v^2} = 0;$$

$$R_1 = c^2\left[1 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial v}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v} - \Phi_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial v} - v\right)^2;$$

$$R_2 = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u} - \Phi_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial u} - u\right)\cdot\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v} - \Phi_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial v} - v\right) - c^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial v};$$

$$R_3 = c^2\left[1 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u} - \Phi_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial u} - u\right)^2. \tag{5.12}$$

Подстановка (5.9) в (5.4) дает:

$$H = \Phi_1 - \frac{u^2 + v^2 + \Phi_2^2}{2}; \quad w = -\Phi_2. \tag{5.13}$$

Система двойных волн (5.11—5.13) впервые другим путем была выведена О. С. Рыжовым [11]. Из полученной системы следуют частные случаи: плоское нестационарное движение газа $\Phi_2=0$, пространственное стационарное движение, $\Phi_1=\mathrm{const}$ [13, 9, 10]. Эти случаи впервые были исследованы для политропного процесса. Полагая в (5.11—5.12) $c\to\infty$, получим систему двойных волн для несжимаемой жидкости. Приведем здесь лишь новое значение коэффициента R_i ($i=1, 2, 3$).

$$R_1 = 1 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial v}\right)^2; \quad R_2 = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial v}; \quad R_3 = 1 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}\right)^2. \tag{5.14}$$

В случае акустического приближения, произведя упрощения аналогично случаю тройных волн, получим:

$$R_1 = c_0^2\left[1 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial v}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v}\right)^2; \quad R_2 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial v} - c_0^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial v};$$

$$R_3 = c_0^2\left[1 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}\right)^2. \tag{5.15}$$

Из приведенного вывода следует, что других двойных волн вида (5.1) не существует.

6. Коротко остановимся на выводе системы простых волн вида:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(u); \quad v = v(u); \quad w = w(u). \tag{6.1}$$

Можно показать, что для этого достаточно в (2.13), (3.10) с учетом (3.5) положить:

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 = 1; \quad \beta_2 = 1; \quad \alpha_1^0 = 0; \quad \beta_1^0 = 0;$$

$$\alpha_2^0 = -1; \quad \beta_2^0 = -1. \tag{6.2}$$

Тогда получим третий вид касательного преобразования:

$$\Phi = -\varphi + xu; \quad \Phi = \Phi(t, u, y, z); \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial u}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{6.4}$$

Аналогично рассмотренному выше можно показать, что простые волны вида (6.1) возможно получить лишь в случае

$$\Phi = \Phi_0(u) + \Phi_1(u)t + \Phi_2(u)y + \Phi_3(u)\cdot z. \tag{6.5}$$

Запишем полученную систему простых волн:

$$\begin{gathered}(\Phi_1^1)^2 - 2\left(u + \Phi_2\Phi_2^1 + \Phi_3\Phi_3^1\right)\Phi_1^1 + \Phi_2^2\left(\Phi_2^1\right)^2 + \Phi_3^2\left(\Phi_3^1\right)^2 + \\ + 2u\left(\Phi_2\Phi_2^1 + \Phi_3\Phi_3^1\right) + 2\left(\Phi_2^1\Phi_3^1\Phi_2\Phi_3\right) - \\ - c^2\left[1 + \left(\Phi_2^1\right)^2 + \left(\Phi_3^1\right)^2\right] + u^2 = 0; \qquad (6.6)\\ x = \Phi_0^1 + \Phi_2^1 t + \Phi_2^1 y + \Phi_3^1 z;\end{gathered}$$

$$v = -\Phi_2(u); \quad w = -\Phi_3(u); \quad \Phi_0 = \Phi_0(u); H = \Phi_1 - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}. \tag{6.7}$$

Считая $v = v(u)$; $w = w(u)$; $\Phi_0 = \Phi_0(u)$ — произвольными функциями. можно проинтегрировать (6.6) и для политропного процесса записать общее решение системы простых волн в виде:

$$x = \Phi_0^1 + \left\{u + vv' + ww' \pm \sqrt{1 + (v')^2 + (w')^2}\cdot c\right\}t - v'y - w'z; \tag{6.8}$$

$$H = \left(c_1 \pm \frac{\sqrt{j-1}}{2}\int\sqrt{1 + (v')^2 + (w^1)^2}\,du\right)^2;, \quad c^2 = (j-1)H. \tag{6.9}$$

Впервые подобное общее решение другим путем получено Н. Н. Яненко [6]. В случае одномерного нестационарного движения газа $v = w = 0$ из (6.8—6.9) сразу следует известное решение Римана:

$$x = \Phi_0^1 + (u \pm c)t; \quad H = \left(c_1 \pm \frac{\sqrt{j-1}}{2}u\right)^2; \quad c^2 = (j-1)H, \tag{6.10}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

В заключение автор благодарит Л. В. Овсянникова, С. В. Фальковича и Г. В. Филиппова за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lie—Engel «Theorie der Transformationsgruppen» BD 1—III, Leipzig 1888—1890.

2. Ф. Клейн. Высшая геометрия, ОНТИ, М., 1939.

3. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. ИЛ, М., 1960.

4. Франк, Р. Мизес Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, ОНГИМ, М—Л., 1937.

5. Ю. Я. Погодин, В. А. Сучков, Н. Н. Яненко. О бегущих волнах уравнений газовой динамики, ДАН СССР, т. 119, № 3. 1958.

6. Н. Н. Яненко. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений, ДАН СССР, т. 109, № 1, 1956.

7. А. А. Никольский. Обобщение волн Римана на случай пространства. Сборник теоретических работ по аэродинамике, ЦАГИ. Оборонгиз, 1957.

8. С. В. Валландер. Развертывающиеся крылья. Вестник ЛГУ серия матем., мех. и астр., № 19, вып. 4, 1959.

9. А. А. Никольский. О классе адиабатических течений газа, который в пространстве годографа скорости изображается поверхностями. Сборник теоретических работ по аэродинамике, ЦАГИ. Оборонгиз, 1957.

10. А. А. Никольский. Об одном классе точных решений пространственных уравнений газовой динамики, АН СССР. Инженерный журнал, т. 1, вып. 4, 1961.

11. О. С. Рыжов. О течениях с вырожденным годографом. ПММ., т. 21, вып. 4, 1957.

12. А. Ф. Сидоров, Н. Н. Яненко. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. ДАН СССР, с. 123, № 5, 1958.

13. В. А. Сучков. Двойные волны плоского потенциального течения политропного газа. Сборник. «Разностные методы решения задач математической физики», ч. 1. Труды математического института АН СССР, им. В. А. Стеклова, т. XXIV, 1966.

14. А. Ф. Сидоров. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.

15. Л. В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений, изд-во СОАН СССР. Новосибирск, 1962.

16. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Система квазилинейных уравнений. Наука, М, 1968.

17. Н. В. Розе. Лекции по аналитической механике, т. 1, изд-во ЛГУ, 1938.

18. Ф. Р. Гантмахер. Лекции по аналитической механике. Физматгиз, М., 1960.

19. Р. Мизес. Математическая теория течений сжигаемой жидкости, ИЛ. М., 1961.