

Л. И. КУДРЯШЕВ, А. А. СМИРНОВ,
Н. Л. МЕНЬШИХ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ТЕПЛООБМЕНЕ И СОПРОТИВЛЕНИИ ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ

ПРИ ЧИСЛАХ $1 < Re_{\infty} < 100$

Одной из центральных задач современной аэрогидродинамики дисперсных сквозных потоков является исследование сопротивления и теплообмена при обтекании тел сферической формы в области малых чисел Рейнольдса.

Если задача о сопротивлении, составляющая предмет классической гидромеханики, решена достаточно полно в работах Стокса [1], Озеена [2] и Гольдштейна [3] для чисел $Re_{\infty} \leq 1$, то задача о теплообмене, рассматриваемая Нуссельтом [4] схематично, сведена к задаче о теплопроводности через сферическую оболочку, внешний радиус которой неограниченно велик. Такая постановка задачи и ее решение ограничены в физическом отношении и оправдываются лишь при $Re \rightarrow \infty$.

В последнее время Акривозом, Т. Тейлором [5], Р. Кронигом и Д. Брюйстеном [6], Л. Брайтманом [7] выполнены решения задачи о теплообмене при обтекании сферы в области чисел $Re_{\infty} \geq 1$ в условиях стационарной задачи методом разложения по малым значениям числа Re_{∞} .

Л. И. Кудряшев и А. А. Гусаков [8], используя готовые результаты гидродинамической задачи Стокса, решали задачу о теплообмене методом области теплового влияния для изменения чисел Re_{∞} от 0 до 1. При этом максимальное расхождение с предельным решением Нуссельта, т. е. при $Re_{\infty} = 1$, не превышает 16,5%. Это указывает на то, что простое решение Нуссельта для стационарной задачи в пределах приемлемой точности приводит к удовлетворительным результатам.

В практическом отношении существенна оценка влияния тепловой нестационарности на процессе теплообмена. Эту оценку следует, прежде всего, искать в решении сопряженной задачи. Задача такого типа была поставлена и решена Л. И. Кудряшовым и А. А. Смирновым [9] для простейшего случая нестационарного процесса теплопроводности. Если учесть вывод работы [8] в отношении пригодности решения Нуссельта для области изменения чисел $0 \leq \text{Re}_\infty \leq 1$, то можно считать, что на коэффициент теплообмена значительно влияет число $F_{0\infty}$ [9], [10]. В начале развития процесса коэффициент теплообмена может быть очень большим, с чем нельзя не считаться при тепловых расчетах теплообменных аппаратов.

На практике также часто встречаются с необходимостью определения коэффициентов сопротивления и теплообмена для чисел $\text{Re}_\infty > 1$. Предпосылки Стокса, Озеена при решении гидродинамической задачи в этом случае малоприменимы, а применение теории пограничного слоя при $\text{Re}_\infty < 25$ приводит к неверным результатам. Следовательно, при решении гидродинамических и тепловых задач для данной области чисел Re_∞ необходимо рассмотреть возможности непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений, определяющих задачу, или предложить новую математическую модель, упрощающие предпосылки которой были бы не связаны с условием $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$. С этой точки зрения наиболее подходящей является идея областей гидродинамического и теплового влияния. Применительно к рассматриваемой задаче, под областями гидродинамического и теплового влияния у обтекаемой сферы следует понимать такие конечные области Δ_1 и Δ_e , в которых нормальная составляющая скорости W_r принимается приближенно равной нулю, а на внешних границах указанных областей соответственно в первой имеет место потенциальное течение, а во второй температура равна температуре набегающего потока. Учитывая это определение при постоянных теплофизических характеристиках потока и тела, когда вследствие малости размера сферической частицы можно пренебречь температурным градиентом, математическую формулировку задачи представим в виде следующей системы:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0; \quad (a)$$

$$\frac{\text{Re}_\infty}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (r_1 W_\psi^2) + \text{Re}_\infty \text{Eu} \frac{\partial}{\partial \psi} (r_1 p_1) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} (r_1 W_\psi); \quad (b)$$

$$\frac{1}{\sin \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (W_\psi \sin \psi) = 0; \quad (c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \text{Fo}_\infty} (r_1 \Theta) + \frac{\text{Pe}_\infty}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (W_\psi \sin \psi r_1 \Theta) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} (r_1 \Theta); \quad (d)$$

$$\frac{d\Theta W}{d\text{Fo}_\infty} = -A \overline{\text{Nu}} \Theta W; \quad (e)$$

$$Fo_{\infty} = 0; \quad \Theta = 0; \quad \Theta_W = 1; \quad (f)$$

$$y_1 = 0; \quad W_{\psi_1} = 0; \quad \Theta = \Theta_W(Fo_{\infty}); \quad (g)$$

$$y_1 = \Delta_1; \quad W_{\psi_1} = \frac{3}{2} \sin \psi; \quad (h)$$

$$y_1 = \Delta_2; \quad \Theta = 0, \quad (i)$$

где

$$y_1 = \frac{y}{r_1}; \quad W_{\psi_1} = \frac{W_{\psi}}{W_{\infty}}; \quad \Theta = \frac{T_{\infty} - T}{T_{\infty} - T_0}; \quad p_1 = \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}};$$

$$Eu = \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty} W_{\infty}^2}; \quad Re_{\infty} = \frac{W_{\infty} r_0}{\nu_{\infty}}; \quad Pe_{\infty} = \frac{W_{\infty} r_0}{a_{\infty}}; \quad Fo_{\infty} = \frac{a_{\infty} \tau}{r_0^2};$$

$$A = \frac{3C_{p_{\infty}} \gamma_{\infty}}{C_{p_{\text{шт}}} \gamma_{\text{шт}}}; \quad Nu = \frac{\alpha r_0}{\lambda_{\infty}}; \quad r_1 = \frac{r}{r_0}; \quad \Delta_1 = \frac{|\Delta_1|}{r_0}; \quad \Delta_2 = \frac{|\Delta_2|}{r_0}.$$

Дифференциальному уравнению (1в) соответствует интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{Re_{\infty}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\Delta_1^2 \int_0^1 \frac{r_1}{\Delta_1} W_{\psi_1}^2 d\eta_1 \right) + Re_{\infty} Eu \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\Delta_1^2 \int_0^1 \frac{r_1}{\Delta_1} p_1 d\eta_1 \right) = \\ = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \left[\frac{\partial (r_1 W_{\psi_1})}{\partial \eta_1} \right]_{\eta=1} - \left[\frac{\partial (r_1 W_{\psi_1})}{\partial \eta_1} \right]_{\eta=0} \right\}, \quad \left(\eta_1 = \frac{y_1}{\Delta_1} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку

$$\left[\frac{\partial (r_1 W_{\psi_1})}{\partial \eta_1} \right]_{\eta=1} - \left[\frac{\partial (r_1 W_{\psi_1})}{\partial \eta_1} \right]_{\eta=1} = W_{\psi_1} \Big|_{\eta=1} - \left(\frac{\partial W_{\psi_1}}{\partial \eta_1} \right)_{\eta=0}, \quad (3)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{Re_{\infty}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\Delta_1^2 \int_0^1 \frac{r_1}{\Delta_1} W_{\psi_1}^2 d\eta_1 \right) + Re_{\infty} Eu \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\Delta_1^2 \int_0^1 \frac{r_1}{\Delta_1} p_1 d\eta_1 \right) = \\ = \frac{1}{\Delta_1} \left[W_{\psi_1} \Big|_{\eta=1} - \left(\frac{\partial W_{\psi_1}}{\partial \eta_1} \right)_{\eta=0} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как на внешней границе гидродинамической области влияния имеет место потенциальное течение, то

$$p_1 = - \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{Eu} \sin^2 \psi. \quad (5)$$

Кроме того, аппроксимируем поле скоростей в области гидродинамического влияния в виде полинома

$$W_{\psi_1} = \frac{3}{2} \sin \psi (2\eta_1 - \eta_1^2), \quad (6)$$

удовлетворяющего на основании (1g) и (1) граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 = 0; \quad W_{\psi_1} = 0; & \quad (a) \\ \eta_1 = 1; \quad W_{\psi_1} = \frac{3}{2} \sin \varphi & \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и дополнительному условию

$$\eta = 1; \quad \frac{\partial W_{\psi_1}}{\partial \eta_1} = 0, \quad (8)$$

введенному для плавного смыкания скоростного поля гидродинамической области влияния с потенциальным течением на внешней границе.

Внося (5) и (6) в (4), получаем

$$\Delta \frac{d}{d\psi} \left\{ \Delta^2 \sin^2 \psi \int_0^1 \frac{r_1}{\Delta_1} [1 - (2\eta_1 - \eta_1^2)^2] d\eta_1 \right\} = \frac{4}{3} \frac{\sin \psi}{\text{Re}_\infty}. \quad (9)$$

В интересующем диапазоне изменения чисел $1 \leq \text{Re}_\infty \leq 100$ гидродинамическая область влияния сравнима с размером частицы. Следовательно, наличие под интегралом члена $\frac{r_1}{\Delta_1} = \frac{1 + y_1}{\Delta_1} = \frac{1 + \Delta_1 \eta}{\Delta_1}$ приводит к тому, что дифференциальное уравнение (9) становится нелинейным относительно Δ_1 . Между тем, область изменения чисел $1 \leq \text{Re}_\infty \leq 100$ находится между двумя предельными случаями, когда линейризация (9) очевидна. Первый из них характерен для чисел $\text{Re}_\infty < 1$. Толщина области влияния в этом случае $\Delta_1 \gg 1$. Поэтому можно приближенно положить $\frac{r_1}{\Delta_1} = \eta_1$. Второй предельный случай имеет место, когда $\text{Re}_\infty \gg 1$. Тогда $\Delta_1 \ll 1$. Следовательно, для второй предельной области можно приближенно принять $\frac{r_1}{\Delta_1} \approx \frac{1}{\Delta_1}$. Указанные предельные случаи позволяют рационально выбрать аппроксимацию отношения $\frac{r_1}{\Delta_1}$, приводящую к линейризации уравнения (9). При этом для оценки величины отношения $\frac{r_1}{\Delta_1}$ можно ограничиться его значением в передней критической точке, поскольку приближенно

$$\frac{r_1}{\Delta_1} = \frac{1 + \Delta_1 \eta_1}{\Delta_1} \approx \frac{1 + \Delta_{1,0} \eta_1}{\Delta_{1,0}}. \quad (10)$$

Если воспользоваться указанными ранее допущениями для предельных случаев, то из (9) легко находятся толщины области гидродинамического влияния в передней критической точке:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } \text{Re}_\infty < 1; \quad \Delta_{1,0} &= \sqrt[3]{\frac{5}{\text{Re}_\infty}} & (a) \\ \text{для } \text{Re}_\infty \gg 1; \quad \Delta_{1,0} &= \sqrt{\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{\text{Re}_\infty}} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Выражения (11) позволяют ориентировочно оценить границы изменения Δ в интересующей нас области чисел $1 \leq \text{Re}_\infty \leq 100$. Действительно, полагая в (11а) $\text{Re}_\infty = 0,2$, а в (11в) $\text{Re}_\infty = 100$, получаем $0,12 \leq \Delta_1 \leq 3$. Установив пределы изменения $\Delta_{1,0}$ и учитывая (10) и (11), попытаемся аппроксимировать $r_1 = 1 + y_1$, при помощи выражения

$$1 + y \cong K y_1^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Коэффициент K находится из условия минимума функционала

$$\delta \int_0^3 [(1 + y_1) - K y_1^{\frac{1}{2}}]^2 dy_1 = 0, \quad (13)$$

откуда

$$K = \frac{\int_0^3 (1 + y_1) y_1^{\frac{1}{2}} dy_1}{\int_0^3 y_1 dy_1} \cong 2,157. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), получим

$$1 + y_1 \cong 2,157 y_1^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

В таблице 1 приведено сравнение результатов расчета левой и правой частей уравнения (15) при изменении y_1 от 0 до 1.

Таблица 1

y_1	$1 + y_1$	$2,157 y_1^{0,5}$	y_1	$1 + y_1$	$2,157 y_1^{0,5}$
0	1	0	1,5	2,5	2,64
0,25	1,25	1,08	2,0	3,0	3,04
0,50	1,50	1,52	2,50	3,50	3,41
0,75	1,75	1,861	3,00	4,00	3,74
1,00	2,00	2,157			

Таблица 1 указывает на то, что аппроксимация (15) достаточно удовлетворительно оправдывается на всем интервале значений y за исключением $y_1 = 0$, где расхождение максимально. Однако это не может привести к существенной ошибке при интегрировании, поскольку область значительных отклонений при аппроксимации достаточно мала.

Внося (15) в (9), приходим к следующему линейному дифференциальному уравнению относительно Δ_1 :

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} \right)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} \text{ctg} \psi \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} \right)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3} \frac{1}{\sin \psi} = 0; \quad (16)$$

$$\Delta_{1,0} = \left(\frac{1,335}{\text{Re}_\infty} \right)^{\frac{2}{5}}. \quad (17)$$

Интегрируя (16) при начальном условии и $\psi \rightarrow 0$; $\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} \rightarrow 1$, получим

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} = 1,62 \left(\frac{\int_0^\psi \sin^{7/3} \psi d\psi}{\sin^{7/3} \psi} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (18)$$

или приближенно

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} \cong 1,62 \left(\frac{\int_0^\psi \sin^2 \psi d\psi}{\sin^3 \psi} \right)^{\frac{2}{5}} = 1,62 \left(\frac{\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\psi}{\sin^3 \psi} \right)^{\frac{2}{5}}. \quad (19)$$

Обозначая

$$\Phi_0(\psi) = \left(\frac{\frac{\psi}{2} - \frac{1}{n} \sin 2\psi}{\sin^3 \psi} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (20)$$

уравнение (19) запишем в виде

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} = 1,62 \Phi_0(\psi). \quad (21)$$

Для определения силы сопротивления воспользуемся уравнением

$$-R_x = \int_0^\pi (p_1)_{r_1; \psi} \sin \psi \cdot 2\pi r_0^2 \sin \psi d\psi = c_x \frac{\rho_\infty w_{1\infty}^2}{2} \pi r_0^2,$$

откуда

$$c_x = 4Eu \int_0^\pi (p_1)_{r_1; \psi} \sin^2 \psi d\psi. \quad (22)$$

Так как

$$(p_1)_{r_1; \psi} = \frac{1}{Eu \text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial w_{\psi_1}}{\partial r_1} - \frac{w_{\psi_1}}{r_1} \right) \quad (23)$$

при $r_1 = 1$; $w_{\psi_1} = 0$, то

$$(p_1)_{r_1; \psi} = \frac{1}{Eu \text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial w_{\psi_1}}{\partial r_1} \right)_{r_1=1} = \frac{1}{Eu \text{Re}_\infty} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{\partial w_{\psi_1}}{\partial \eta_1} \right)_{\eta_1=0}. \quad (24)$$

Внося (24) в (22) и учитывая (6), (17) и (21), получим

$$c_x = \frac{6,61}{\text{Re}_\infty^{0,6}} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \psi d\psi}{\Phi_0(\psi)}. \quad (25)$$

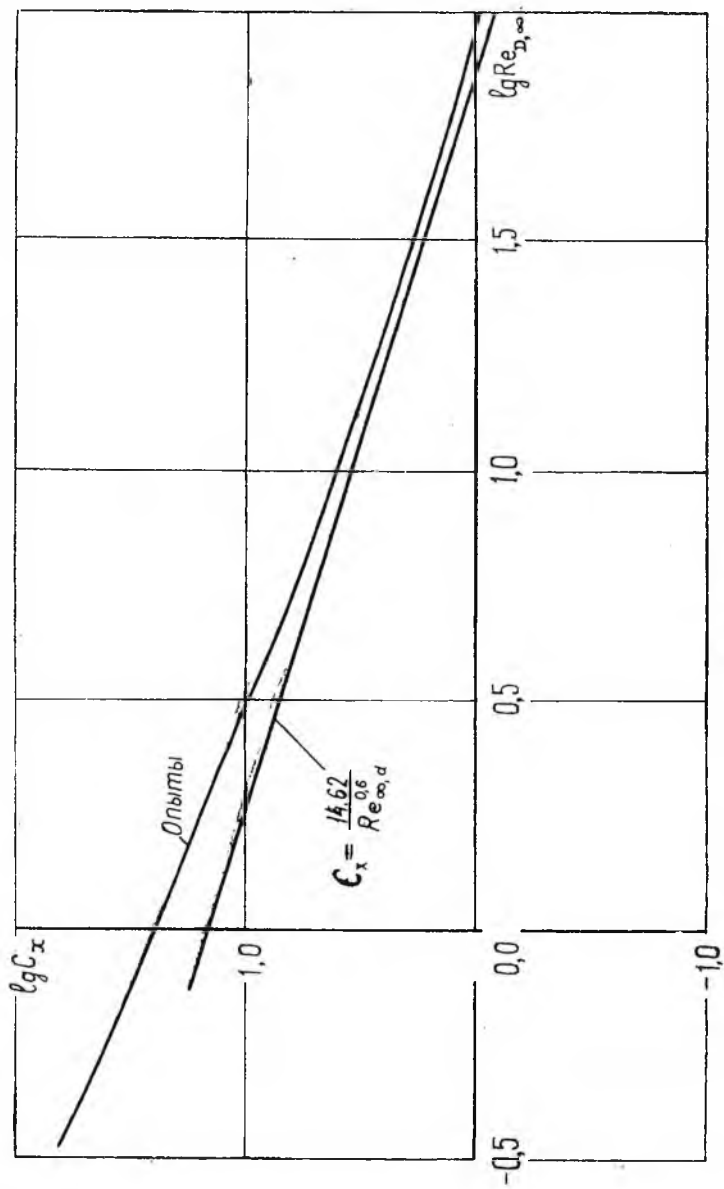


Рис. 1.

Численное интегрирование на ЭВМ дает

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 \psi d\psi}{\Phi_0(\psi)} \cong 1,4575. \quad (26)$$

Внося (26) в (25), окончательно получим для коэффициента сопротивления в области изменения чисел $1 \leq \text{Re}_{\infty} \leq 100$ следующее уравнение:

$$c_x = \frac{9,62}{\text{Re}^{0,6}} = \frac{14,55}{\text{Re}_{D,\infty}^{0,6}}. \quad (27)$$

На рис. 1 приведено сравнение коэффициента сопротивления c_x , рассчитанного по (28), с кривой Кагельмана [10], осредняющей опытные данные Арнольда [11], Либстера и Шиллера [12] и Аллена [13]. Существенное расхождение уравнение (27) с опытными данными имеет место при числах Re_{∞} , близких к единице. Как и следовало ожидать, здесь предпочтительнее оказываются решения Стокса, Озеена и Гольдштейна.

Решение уравнения (1д) будем искать в виде:

$$u = u_1 + u_2, \quad (28)$$

где

$$u = r_1 \Theta; \quad (29)$$

$$u_1 = u_1(\psi; y_1); \quad (30)$$

$$u_2 = u_2(\text{Fo}_{\infty}; y_1). \quad (31)$$

Уравнение (1а) при помощи (28), (30) и (31) распадается на два уравнения, первое из них имеет вид

$$\frac{\text{Pe}_{\infty}}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\omega_{\psi}, u_1 \sin \psi) = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \quad (32)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 = 0; \quad u_1 = \Theta_W(\text{Fo}_{\infty}); \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_2^2} = 0 \quad (a) \\ \eta_2 = 1; \quad u_1 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_2^2} = 0 \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и второе

$$\frac{\partial u_2}{\partial \text{Fo}_{\infty}} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_1^2} \quad (34)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 = 0; \quad u_2 = 0 \quad (a) \\ \eta_2 = 1; \quad u_2 = 0 \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Граничным условиям (33) удовлетворяет полином

$$u_1 = \Theta_W (1 - 2\eta_2 + 2\eta_2^3 - \eta_2^4). \quad (36)$$

Уравнению (32) соответствует интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \psi} (\Delta_2 \int_0^1 W_{\psi_1} u_1 \sin \psi \, d\eta_2) = - \frac{1}{\text{Pe}_{\infty}} \cdot \frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} \right)_{\eta_2=0} \sin \psi_1. \quad (37)$$

Внося сюда (6) и (36), получаем:

$$\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \frac{d}{d\psi} \left[\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^2 \Delta_1 \sin^2 \psi f \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \right] = \frac{10}{\text{Pe}_{\infty}} \cdot \frac{\sin \psi}{\Delta_1}, \quad (38)$$

$$f \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) = 1 - \frac{5}{28} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right). \quad (39)$$

Выражение (39) в пределах изменения $1 \leq \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \leq 3$ удовлетворительно аппроксимируется функцией

$$f \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) = \frac{\kappa}{x_1^{1/2}}, \quad (40)$$

$$x_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (41)$$

Величина коэффициента κ находится из условия минимума функционала

$$\delta \int_1^3 \left\{ \left(1 - \frac{5}{28} x_1 \right) - \frac{\kappa}{x_1^{1/2}} \right\}^2 dx_1 = 0, \quad (42)$$

откуда

$$\kappa = \frac{\int_0^3 \left(1 - \frac{5}{28} x_1 \right) \frac{dx_1}{x_1^{0,5}}}{\int_1^3 \frac{dx_1}{x_1}} \cong 0,875. \quad (43)$$

Внося (43) в (40) и принимая во внимание (39) и (41), окончательно получим $f \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) = 1 - \frac{5}{28} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \cong \frac{0,875}{\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^{1/2}}$. (44)

В таблице 2 приведено сравнение результатов расчета левой и правой частей уравнения (44) при изменении $\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)$ от 1 до 3.

Таблица 2

$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$	$1 - \frac{5}{28} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)$	$\frac{0,875}{\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^{1/2}}$	$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$	$1 - \frac{5}{28} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)$	$\frac{0,875}{\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^{1/2}}$
1	0,822	0,875	0,25	0,597	0,583
1,25	0,777	0,782	2,50	0,553	0,553
1,50	0,732	0,714	2,75	0,509	0,533
1,75	0,688	0,663	3,00	0,464	0,506
2,00	0,643	0,621			

Таблица 2 указывает на то, что аппроксимация (42) удовлетворительно оправдывается во всей рассматриваемой области изменения $\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)$, поскольку максимальное расхождение результатов не превышает 9%.

Внося (44) в (38), после ряда преобразований получим

$$(\Delta_1 \sin^2 \psi) \frac{d}{d\psi} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{3} \frac{d}{d\psi} (\Delta_1 \sin^2 \psi) \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{18,85 \sin \psi}{\text{Re}_\infty \Delta_1}. \quad (45)$$

Полагая в (45) $\psi = 0$, находим в передней критической точке отношение $X_{1,0} = \frac{\Delta_{2,0}}{\Delta_{1,0}}$

$$X_{1,0} = \frac{\Delta_{2,0}}{\Delta_{1,0}} \cong \frac{2}{\text{Re}_\infty^{0,08} \text{Pr}_\infty^{0,4}}. \quad (46)$$

Среднее значение отношения $\frac{\Delta_{2,0}}{\Delta_{1,0}}$ в пределах изменения чисел Re_∞ от «1» до «100» составляет

$$\bar{X}_{1,0} = \left(\frac{\Delta_{2,0}}{\Delta_{1,0}}\right) = \frac{2}{\text{Pr}_\infty^{0,4}} \cdot \frac{1}{99} \int_1^{100} \frac{d \text{Re}_\infty}{\text{Re}_\infty^{0,08}} = \frac{1,49}{\text{Pr}_\infty^{0,4}}. \quad (47)$$

Если в (47) принять для газовой среды $\text{Pr}_\infty = 0,722$, то среднее значение отношения $\left(\frac{\Delta_{2,0}}{\Delta_{1,0}}\right) \cong 1,72$.

Подставляя (17) в (46), находим значение толщины области теплового влияния в передней критической точке

$$\Delta_{2,0} \cong 2,24 \text{Re}_\infty^{-0,48} \text{Pr}_\infty^{-0,4}. \quad (48)$$

Учитывая (46), можем записать уравнение (45) в виде:

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{X_1}{X_{1,0}}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{3} \frac{d}{d\psi} (\delta_1 \sin^2 \psi) \left(\frac{X_1}{X_{1,0}}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3} \frac{1}{\delta_1^2 \sin \psi} = 0, \quad (49)$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}}. \quad (50)$$

Интегрируя и учитывая, что $\psi \rightarrow 0$; $\frac{X_1}{X_{1,0}} = 1$, получаем

$$\frac{X_1}{X_{1,0}} = 1,62 \frac{\left[\int_0^\psi \frac{(\delta_1 \sin^2 \psi)^{5/3} d\psi}{\delta_1^2 \sin \psi} \right]^{2/5}}{(\delta_1 \sin^2 \psi)^{2/3}} \quad (51)$$

или, учитывая (21),

$$\frac{X_1}{X_{1,0}} \cong 1,1 \Phi_1(\psi), \quad (52)$$

$$\Phi_1(\psi) = \frac{\left\{ \int_0^{\psi} \frac{[\Phi_0(\psi) \sin^2 \psi]^{3/2} d\psi}{\Phi_0^2(\psi) \sin \psi} \right\}^{2/3}}{[\Phi_0(\psi) \sin^2 \psi]^{2/3}}. \quad (53)$$

Внося (17), (21) и (46) в (52), получим:

$$\Delta_2 \cong 4,01 \operatorname{Re}_{\infty}^{-0,48} \operatorname{Pr}^{-0,4} \Phi_2(\psi), \quad (54)$$

$$\Phi_2(\psi) = \Phi_0(\psi) \Phi_1(\psi). \quad (55)$$

Если же учесть (48), то находим

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_{2,0}} \cong 1,79 \Phi_2(\psi). \quad (56)$$

В таблице 3 приведены значения функций $\Phi_0(\psi)$, $\Phi_1(\psi)$ и $\Phi_2(\psi)$ при изменении ψ от 0 до π_1 .

Таблица 3

ψ°	$\Phi_0(\psi)$	$\Phi_1(\psi)$	$\Phi_2(\psi)$	ψ°	$\Phi_0(\psi)$	$\Phi_1(\psi)$	$\Phi_2(\psi)$
1	0,6445	0,8640	0,5568	95	0,9512	0,9942	0,9437
1	0,6447	0,8699	0,5599	100	1,0013	1,0121	1,0134
5	0,6450	0,8782	0,5664	105	1,0593	4,0327	1,0941
10	0,6467	0,8789	0,5685	110	1,1277	1,0563	1,1912
15	0,6497	0,8801	0,5718	115	1,2084	1,0838	1,3097
20	0,6539	0,8818	0,5766	120	1,3050	1,1158	1,4562
25	0,6594	0,8840	0,5829	125	1,4221	1,1535	1,6405
30	0,6663	0,8867	0,5908	130	1,5665	1,1984	1,8773
35	0,6745	0,8810	0,6003	135	1,7479	1,2525	2,1893
40	0,6843	0,8938	0,6116	140	1,9915	1,3188	2,2613
45	0,6956	0,8982	0,6249	145	2,2917	1,4015	3,2120
50	0,7088	0,9034	0,6403	150	2,7202	1,5076	4,1010
55	0,7239	0,9092	0,6581	155	3,3445	1,6482	5,5125
60	0,7411	0,9159	0,6787	160	4,3256	1,8440	7,9777
65	0,7507	0,9234	0,7024	165	6,0700	2,1385	12,1512
70	0,7830	0,9319	0,7297	170	9,7870	2,6448	25,8859
75	0,8084	0,9415	0,7611	175	2,102 · 10 ⁵	0,8 · 10 ²	1,6815 · 10 ⁷
80	0,8372	0,9523	0,7973	180	∞	∞	∞
85	5,8702	0,9646	0,8324				
90	0,9079	0,9784	0,8883				

Считая теперь Δ_2 известной, можем для (34) записать интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Fo}_{\infty}} \int_0^1 u_2 d\eta_2 = \frac{1}{\Delta_2^2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta_2} \right)_{\eta_2=1} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta_2} \right)_{\eta_2=0} \right]. \quad (57)$$

Осредняя по поверхности сферы обе части (57), будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Fr}_{\infty}} \int_0^1 u_2 d\eta_2 = \frac{1}{\Delta_2^2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta_2} \right)_{\eta_2=1} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta_2} \right)_{\eta_2=0} \right], \quad (58)$$

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{\int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\Delta_2^2}}{\int_0^\pi \sin \psi d\psi} = \frac{\text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8}}{3r} \int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\Phi_2^2(\psi)}. \quad (59)$$

Вычисляя интеграл по данным таблицы 3, получим

$$\int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\Phi_2^2(\psi)} = 2,7032. \quad (60)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = 0,0845 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,4}. \quad (61)$$

Граничным условиям (35) удовлетворяет полином

$$u_2 = c (y_2 - y_2^2). \quad (62)$$

Внося (62) в (58), приходим к уравнению относительно C

$$\frac{dc}{d\text{Fo}_\infty} = -\frac{12c}{\Delta_2^2}. \quad (63)$$

Интегрируя, получим

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{12\text{Fo}_\infty}{\Delta_2^2}\right), \quad (64)$$

или, принимая во внимание (61), будем иметь

$$c = c_0 \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty). \quad (65)$$

На основании (28) с учетом (36), (62) и (65) можем записать

$$u = \Theta_w (1 - 2\eta_2 + 2\eta_2^3 - \eta_2^4) + c_0 (\eta_2 - \eta_2^2) \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty). \quad (66)$$

При $\text{Fo}_\infty = 0$; $u = \Theta r_1 = 0$; $\Theta_w = 1$. Следовательно, для определения c_0 имеем условие

$$\delta \int_0^1 \{ (1 - 2\eta_r + 2\eta_r^3 - \eta_r^4) d\eta_r + c_0 (\eta_2 - \eta_2^2) \}^2 d\eta_2 = 0, \quad (67)$$

откуда

$$c_0 = -\frac{\int_0^1 (1 - 2\eta_2 + 2\eta_2^3 - \eta_2^4) (\eta_2 - \eta_2^2) d\eta_2}{\int_0^1 (\eta_2 - \eta_2^2)^2 d\eta_2}. \quad (68)$$

Поэтому

$$\Theta = \frac{\Theta_w}{r_1} (1 - 2\eta_r + 2\eta_r^3 - \eta_r^4) - \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{r_1} (\eta_2 - \eta_2^2) \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,9} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty). \quad (69)$$

Для определения коэффициента теплообмена воспользуемся условием

$$\text{Nu} = \frac{1}{\Theta_w} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r_1} \right)_{r_1=1} \quad (70)$$

Учитывая, что

$$\eta_2 = \frac{r_1 - 1}{\Delta_2},$$

(69) можем записать в виде

$$\Theta = \frac{1}{r_1} \left\{ \Theta_w \left[1 - 2 \left(\frac{r_1 - 1}{\Delta_2} \right) + 2 \left(\frac{r_1 - 1}{\Delta_2} \right)^3 - \left(\frac{r_1 - 1}{\Delta_2} \right)^4 \right] - \frac{6}{7} \left[\left(\frac{r_1 - 1}{\Delta_2} \right) - \left(\frac{r_1 - 1}{\Delta_2} \right)^2 \right] \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty) \right\}. \quad (71)$$

Температурный градиент на поверхности

$$-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial r_1} \right)_{r_1=1} = \frac{1}{\Delta_2} \left[2\Theta_w + \frac{6}{7} \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty) \right] + \Theta_w. \quad (72)$$

Внося (72) в (70), получим

$$\text{Nu} = 1 + \frac{2}{\Delta_2} \left[1 + \frac{6}{14\Theta_w} \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty) \right]. \quad (73)$$

Осредняя (73) по поверхности сферы, будем иметь:

$$\overline{\text{Nu}} = \int_0^\pi \sin \psi \text{Nu} d\psi = 1 + \frac{2}{\Delta_2} \left[1 + \frac{6}{14\Theta_w} \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty) \right], \quad (74)$$

$$\frac{2}{\Delta_2} = 0,251 \text{Re}_\infty^{0,48} \text{Pr}_\infty^{0,4} \int_0^\pi \frac{\sin \psi}{\Phi_2(\psi)} d\psi. \quad (75)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\Phi_2(\psi)} = 2,119. \quad (76)$$

Внося (75) с учетом (76) в (74), находим

$$\overline{\text{Nu}} = 1 + 0,527 \text{Re}_\infty^{0,48} \text{Pr}_\infty^{0,4} \left[1 + \frac{6}{14\Theta_w} \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty) \right], \quad (77)$$

или

$$\overline{\text{Nu}}_D = 2 + 0,756 \text{Re}_\infty^{0,48} \text{Pr}_\infty^{0,4} \left[1 + \frac{6}{14\Theta_w} \exp(-1,01 \text{Re}_\infty^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty) \right], \quad (78)$$

или

$$\overline{\text{Nu}}_D \cong 2 + 0,756 \text{Re}_{D,\infty}^{0,48} \text{Pr}_\infty^{0,4} \left[1 + \frac{6}{14\Theta_w} \exp(-2 \text{Re}_{D,\infty}^{0,96} \text{Pr}_\infty^{0,8} \text{Fo}_\infty) \right]. \quad (79)$$

В уравнении (79) имеем

$$\text{Nu}_{D,\infty} = 2 + 0,756 \text{Re}_{D,\infty}^{0,48} \text{Pr}_{\infty}^{0,4}. \quad (80)$$

Тогда (79) можно записать в виде

$$\bar{\text{Nu}}_{D,\infty} = 2 + \bar{\text{Nu}}_{D,\infty} \frac{6}{14\theta_w} \exp(-2\text{Re}_{D,\infty}^{0,96} \text{Pr}_{\infty}^{0,8} \text{Fo}_{\infty}). \quad (81)$$

Для определения неизвестной Θ_w решаем совместно уравнения (1) и (81), получим

$$\frac{d\Theta_w}{\alpha \text{Fo}_{\infty}} = -A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty} \Theta_w - \frac{6}{14} A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty} \exp(-2\text{Re}_{D,\infty}^{0,96} \text{Pr}_{\infty}^{0,8} \text{Fo}_{\infty}). \quad (82)$$

Интегрируя уравнение и используя условие (1), получим

$$\Theta_w = 1 - \frac{3}{7} \frac{A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty}}{2\text{Re}_{D,\infty}^{0,96} \text{Pr}_{\infty}^{0,8} - A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty}} \times \\ \times [\exp(-A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty} \text{Fo}_{\infty}) - \exp(-2\text{Re}_{D,\infty}^{0,96} \text{Pr}_{\infty}^{0,8} \text{Fo}_{\infty})] \quad (83)$$

или

$$\Theta_w = 1 - \frac{3}{7} \frac{A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty}}{4(\bar{\text{Nu}}_{D,\infty} - 2)^2 - A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty}} \times \\ \times \{ \exp[-A \bar{\text{Nu}}_{D,\infty} \text{Fo}] - [-4(\bar{\text{Nu}}_{D,\infty} - 2)^2 \text{Pr}_{\infty}^{0,8} \text{Fo}_{\infty}] \}. \quad (84)$$

Уравнения (79) и (84) являются решениями поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. G. Stokes. Math. and Phys. Papers VIII, 1851.
2. Oseen, Arkh. f. mat. astr. och. fys. 6, № 29, 1910.
3. Goldstein, Proc. Roy. Soc. A, 123, 1929.
4. W. Nusselt, Z. V. di. № 6. 1924.
5. A. Acrivos and S. Taylor. Physics of Fluides, v 5, № 4, 1962.
6. R. Pronig and I. Tsrnijsten. Appl. Sci. Resenarch A-2, 1951.
7. L. Bretman. Norman Bridge Labratory. California Institute of Technology. Rept. № 2F-2. 1952.
8. Л. И. Кудряшов, А. А. Гусаков. Труды КуАИ, вып. 15, 1967.
- 9—10. Л. И. Кудряшев, А. А. Смирнов, 5-ое межвузовское совещание, г. Одесса, 1965.
11. Л. И. Кудряшев. Докторская диссертация, ЭИ АН СССР, 1951.
12. Л. И. Кудряшев. Республикан. конф. по проблемам аэрогидромеханики и тепло-массообмена. Киев, 1967.
13. Cartletman. NACA Technical Note № 271. 1925.
14. Arnold. Phil. Mag. (6), 1911.
15. Siebster and Schiller, Phys Ztech. 25, 1924.
16. Allen, Phil. Mag. 50, 1900.